3.3. اختبار الفرضيات حول النسبة في المجتمع

إن هذه الاختبارات مرغوبة في العديد من المجالات وتكون إحصاءة الاختبار في هذه الحالة هي:

$$\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \sim N(0,1)$$

وعندما نعتبر صحيحة H_0 تكون قيمة الإحصاءة هي:

$$Z_0=\frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0q_0}{n}}}$$

وحسب مستوى المعنوية α نجري الاختبار حسب الحالات التالية:

$$H_0: p=p_0$$

$H_1: p \neq p_0$

أو $H_1: p > p_0$

أو $H_1: p < p_0$

وتكون قاعدة اتخاذ القرار إذا كانت الفرضية البديلة ذات الطرفين على الشكل التالي:

$$\begin{cases} Z_0 \epsilon \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}, Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \quad \Longrightarrow \quad \text{قبول الفرضية } H_0 \\ Z_0 \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}, Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \quad \Longrightarrow \quad \text{رفض الفرضية } H_0 \end{cases}$$

أما إذا كانت الفرضية البديلة ذات الطرف فتكون قاعدة اتخاذ القرار على الشكل التالي:

$$\begin{cases} |\hat{p}-p_0| \leq Z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{p_0q_0}{n}} \quad \Longrightarrow \quad \text{قبول الفرضية } H_0 \\ |\hat{p}-p_0| > Z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{p_0q_0}{n}} \quad \Longrightarrow \quad \text{رفض الفرضية } H_0 \end{cases}$$

الحل	المثال
الصفة المدروسة هي استعمال حزام الأمان. $\hat{p} = 0.85$ نريد اختبار الفرضيات التالية: $H_0: p = 0.8$ $H_1: p > 0.8$ إحصاءة الاختبار هي: $\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \sim N(0,1)$ وعندما نعتبر صحيحة H_0 تكون قيمة الإحصاءة هي: $Z_0 = \frac{0.85 - 0.80}{\sqrt{\frac{0.8 \times 0.2}{100}}} = 1.25$ عند مستوى المعنوية 0.05 وبما أن فرضية العدم ذات طرف فإن القيمة الجدولية تحسب كما يلي: $\alpha = 0.05 \Longrightarrow Z_{1-\alpha} = Z_{0.95} = 1.645$ نلاحظ أن القيمة المحسوبة Z_0 تقع في منطقة قبول H_0 ومنه نقبل H_0 عند مستوى المعنوية 0.05 وبالتالي فإن صدور التشريع بإلزامية استعمال حزام الأمان لم يزد نسبة المستعملين له.	أظهرت سجلات مديرية الأمن العام في إحدى المدن أن نسبة مستعملي حزام الأمان في السيارات قبل تشريع إلزامية الاستعمال هي 0.8، ودرست عينة عشوائية حجمها 100 سائق فوجد أن 85 منهم يستعملون الحزام. المطلوب: اختبار ما إذا كان التشريع قد زاد نسبة المستعملين لحزام الأمان عند مستوى المعنوية 0.05.

4.3. اختبار الفرضيات حول الفرق بين نسبتي مجتمعين

في هذه الحالة نرغب في اختبار الفرضيات التالية:

$$\mathrm{H}_0:\ \mathrm{p}_1 = \mathrm{p}_2$$
$$\mathrm{H}_1:\ \mathrm{p}_1 \neq \mathrm{p}_2$$

أو $\mathrm{H}_1: \mathrm{p}_1 > \mathrm{p}_2$

أو $\mathrm{H}_1: \mathrm{p}_1 < \mathrm{p}_2$

نعتبر صحيحة H_0 تكون قيمة الإحصاءة هي:

$$\mathrm{Z}_0 = \frac{\hat{\mathrm{p}}_1 - \hat{\mathrm{p}}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{\mathrm{n}_1} + \frac{1}{\mathrm{n}_2}\right)\left((1-\mathrm{p})\mathrm{p}\right)}}$$

ويمكن أن نستبدل p بتقديرها غير المتحيز $\hat{p}$ بحيث:

$$\hat{\mathrm{p}} = \frac{x + \mathrm{y}}{\mathrm{n}_1 + \mathrm{n}_2}$$

وتصبح قيمة الإحصاءة:

$$\mathrm{Z}_0 = \frac{\hat{\mathrm{p}}_1 - \hat{\mathrm{p}}_2}{\sqrt{\left(\frac{1}{\mathrm{n}_1} + \frac{1}{\mathrm{n}_2}\right)\left((1-\hat{\mathrm{p}})\hat{\mathrm{p}}\right)}}$$

وتكون قاعدة اتخاذ القرار إذا كانت الفرضية البديلة ذات الطرفين على الشكل التالي:

$$\begin{cases} Z_0 \epsilon \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}, Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \implies H_0 \text{ قبول الفرضية} \\ Z_0 \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}, Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \implies H_0 \text{ رفض الفرضية} \end{cases}$$

أما إذا كانت الفرضية البديلة ذات الطرف فتكون قاعدة اتخاذ القرار على الشكل التالي:

$$\begin{cases} |\hat{p}_1 - \hat{p}_2| \leq Z_{\,1-\alpha}\sqrt{\dfrac{p_1q_1}{n_1} + \dfrac{p_2q_2}{n_2}} \Longrightarrow & H_0 \text{ قبول الفرضية} \\ |\hat{p}_1 - \hat{p}_2| > Z_{\,1-\alpha}\sqrt{\dfrac{p_1q_1}{n_1} + \dfrac{p_2q_2}{n_2}} \Longrightarrow & H_0 \text{ رفض الفرضية} \end{cases}$$

المثال	الحل
في دراسة على نسبة غياب العاملين في فرعين من فروع إحدى المؤسسات وجد أن نسبة الغياب في الفرع أ هي 30٪ في حين نسبة الغياب في الفرع ب هي 35٪. أخذت عينتان من نفس الحجم من الفرعين حجمهما 1000 عامل، فوجد أن عدد الغائبين في الفرع أ 350 عامل وعدد الغائبين في الفرع ب 450 عامل. فهل يمكن القول أن نسبة الغياب الحقيقية في القطاعين مختلفة عند مستوى المعنوية 5٪؟	p_1: نسبة الغياب في الفرع أ. p_2: نسبة الغياب في الفرع ب. $\hat{p}_1 = 0.35$ $\hat{p}_2 = 0.45$ $\hat{p} = 0.4$ نريد اختبار الفرضيات التالية: $H_0:\ p_1 = p_2$ $H_1: p_1 \neq p_2$ إحصاءة الاختبار هي: $\dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\dfrac{p_1 q_1}{n_1} + \dfrac{p_2 q_2}{n_2}}} \sim N(0,1)$ وعندما نعتبر صحيحة H_0 تكون قيمة الإحصاءة هي: $Z_0 = \dfrac{0.35 - 0.45}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{350} + \dfrac{1}{450}\right)\left((1-0.4)0.4\right)}} = -3.33$ عند مستوى المعنوية 0.05 وبما أن فرضية العدم ذات طرفين فإن القيمة الجدولية تحسب كما يلي: $\alpha = 0.05 \Longrightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.975} = 1.96$ نلاحظ أن القيمة المحسوبة Z_0 تقع في منطقة رفض H_0 ومنه نرفض H_0 ، وبالتالي يمكن القول أن نسبة الغياب الحقيقية في القطاعين مختلفة عند مستوى المعنوية 5٪.

5.3. اختبار الفرضيات حول تباين مجتمع

إذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية للمتغير العشوائي X يخضع للتوزيع الطبيعي متوسطه μ وتباينه σ^2 معلوم.

لدينا إحصاءة الاختبار هي:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \lambda^2_{n-1}$$

وعندما نعتبر صحيحة H_0 تكون قيمة الإحصاءة هي:

$$\lambda^2_0 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2_0}$$

وحسب مستوى المعنوية α نجري الاختبار حسب الحالات التالية:

$$H_0: \sigma^2 = \sigma^2_0$$
$$H_1: \sigma^2 \neq \sigma^2_0$$

وتكون قاعدة اتخاذ القرار إذا كانت الفرضية البديلة ذات الطرفين على الشكل التالي:

$$\begin{cases} \lambda^2_0 \epsilon \left[\lambda^2{}_{\frac{\alpha}{2},n-1}, \lambda^2{}_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\right] & \Longrightarrow \quad \text{قبول الفرضية } H_0 \\ \lambda^2_0 \notin \left[\lambda^2{}_{\frac{\alpha}{2},n-1}, \lambda^2{}_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\right] & \Longrightarrow \quad \text{رفض الفرضية } H_0 \end{cases}$$

الحل	المثال
ليكن المتغير العشوائي X_i يمثل سمك جدار الأنبوب. نريد اختبار الفرضيات التالية: $H_0: \sigma^2 = 0.003^2$ $H_1: \sigma^2 \neq 0.003^2$ لدينا إحصاءة الاختبار هي: $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \lambda^2_{n-1}$ وعندما نعتبر صحيحة H_0 تكون قيمة الإحصاءة هي: $\lambda^2_0 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2_0} = 33.78$ عند مستوى المعنوية 0.05 وبما أن فرضية العدم ذات الطرفين فإن القيمة الجدولية تحسب كما يلي: $\alpha = 0.05 \Longrightarrow \lambda^2{}_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} = \lambda^2{}_{0.975,19} = 32.9$ $\alpha = 0.05 \Longrightarrow \lambda^2{}_{\frac{\alpha}{2},n-1} = \lambda^2{}_{0.025,19} = 8.91$ نلاحظ أن القيمة المحسوبة Z_0 تقع في منطقة رفض H_0 ومنه نرفض H_0 ، وبالتالي المنتوج مخالف للمواصفات والمفتش لن يسمح للمصنع بتسويق الأنابيب لذلك اليوم عند مستوى المعنوية 5٪	معمل لإنتاج الأنابيب البلاستيكية يسوق إنتاجه من الأنابيب عندما يكون الانحراف المعياري في سمك جدار الأنبوب بحدود القيمة 0.003 سم. قام مفتش وزارة الصناعة بسحب عينة عشوائية من إنتاج يوم ما عبارة عن 20 أنبوب فلوحظ أن الانحراف المعياري في سمك جدار الأنبوب كان 0.004 سم. هل سيسمح المفتش للمصنع بتسويق الأنابيب لذلك اليوم عند مستوى المعنوية 5٪؟

6.3. اختبار الفرضيات حول تساوي تبايني مجتمعين

إذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$ عينة عشوائية للمتغير العشوائي X يخضع للتوزيع الطبيعي متوسطه μ_1 وتباينه σ_1^2 معلوم، وإذا كانت $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$ عينة عشوائية مستقلة عن العينة الأولى للمتغير العشوائي Y يخضع للتوزيع الطبيعي متوسطه μ_2 وتباينه σ_2^2 معلوم.

لدينا إحصاءة الاختبار هي:

$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{S}_1^2 / \sigma_1^2}{\mathrm{S}_2^2 / \sigma_2^2} \sim \mathrm{F}_{n_1-1, n_2-1}$$

وعندما نعتبر صحيحة H_0 تكون قيمة الاحصاءة هي:

$$\mathrm{F}_0 = \frac{\mathrm{S}_1^2}{\mathrm{S}_2^2}$$

وحسب مستوى المعنوية α نجري الاختبار حسب الحالات التالية:

$$\mathrm{H}_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$\mathrm{H}_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

وتكون قاعدة اتخاذ القرار إذا كانت الفرضية البديلة ذات الطرفين على الشكل التالي:

$$\begin{cases} \lambda_0^2 \epsilon \left[\lambda^2{}_{\frac{\alpha}{2}, n-1}, \lambda^2{}_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}\right] \Longrightarrow \quad H_0 \text{ قبول الفرضية} \\ \lambda_0^2 \notin \left[\lambda^2{}_{\frac{\alpha}{2}, n-1}, \lambda^2{}_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}\right] \Longrightarrow \quad H_0 \text{ رفض الفرضية} \end{cases}$$

<table>
<tr><th>الحل</th><th>المثال</th></tr>
<tr><td>
ليكن المتغير العشوائي X_i يمثل الفترة الزمنية التي يستغرقها الدواء الأول لتسكين الألم.

ليكن المتغير العشوائي Y_i يمثل الفترة الزمنية التي يستغرقها الدواء الثاني لتسكين الألم.

نريد الاختبار الفرضيات التالية:
$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$
لدينا إحصاءة الاختبار هي:
$$F = \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} \sim F_{n_1-1,n_2-1}$$
وعندما نعتبر صحيحة H_0 تكون قيمة الإحصاءة هي:
$$F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2} = 1.3$$
$$\alpha = 0.05 \Longrightarrow f_{1-\frac{\alpha}{2},(n_1-1,n_2-1)} = f_{0.975,(15,12)} = 3.18$$
$$\alpha = 0.05 \Longrightarrow f_{\frac{\alpha}{2},(n_1-1,n_2-1)} = f_{0.025,(15,12)} = 0.337$$
نلاحظ أن القيمة المحسوبة F_0 تقع في منطقة قبول H_0 ومنه نقبل H_0 ، وبالتالي لا يوجد فرق معنوي بين تبايني المجتمعين عند مستوى المعنوية 5٪ .
</td><td>
لمقارنة نوعين من الدواء لعلاج مرض معين من حيث الفترة الزمنية التي يستغرقها الدواء لتسكين الألم أعطي الدواء الأول لعينة تتكون من 16 شخصا والدواء الثاني لعينة تتكون من 13 شخصا، فكان تباين العينة الأولى 64 بينما تباين العينة الثانية 49.

من هذه المعلومات هل يمكن القول بوجود فرق معنوي بين تبايني المجتمعين عند مستوى المعنوية 0.05؟
</td></tr>
</table>