2.3. اختبارات الفرضيات حول الفرق بين متوسطي مجتمعين

1.2.3. اختبارات الفرضيات حول الفرق بين متوسطي مجتمعين مستقلين

يمكن التمييز بين حالتين:

التوزيعات الطبيعية المستقلة المعلومة التباين

لدينا إحصاءة الاختبار هي:

$$Z=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

وعندما نعتبر صحيحة H_0 تكون قيمة الإحصاءة هي:

$$Z_0=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

وحسب مستوى المعنوية α نجري الاختبار حسب الحالات التالية:

أو $H_1:\mu_1-\mu_2>0$

أو $H_1:\mu_1-\mu_2<0$

التوزيعات الطبيعية المستقلة المجهولة التباين

حالة العينات الكبيرة

لدينا إحصاءة الاختبار هي:

$$Z=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

وحسب مستوى المعنوية α نجري الاختبار حسب الحالات التالية:

$$H_0:\mu_1-\mu_2=0$$
$$H_1:\mu_1-\mu_2\neq 0$$

أو $H_1:\mu_1-\mu_2>0$

أو $H_1:\mu_1-\mu_2<0$

حالة العينات الصغيرة

لدينا إحصاءة الاختبار هي:

$$T=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t_{n_1+n_2-2}$$

حيث:

$$S_P^2=\frac{S_1^2(n_1-1)+S_2^2(n_2-1)}{n_1+n_2-2}$$

وحسب مستوى المعنوية α نجري الاختبار حسب الحالات التالية:

$$H_0:\mu_1-\mu_2=0$$
$$H_1:\mu_1-\mu_2\neq 0$$

وتكون قاعدة اتخاذ القرار إذا كانت الفرضية البديلة ذات الطرفين على الشكل التالي:

$$\begin{cases} Z_0 \epsilon \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}, Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \quad \Rightarrow \quad H_0 \text{ قبول الفرضية} \\ Z_0 \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}, Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \quad \Rightarrow \quad H_0 \text{ رفض الفرضية} \end{cases}$$

أما إذا كانت الفرضية البديلة ذات الطرف فتكون قاعدة اتخاذ القرار على الشكل التالي:

$$\begin{cases} |(\overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{Y}})| \leq Z_{\,1-\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\mathrm{n}_1} + \frac{\sigma_2^2}{\mathrm{n}_2}} \quad \Rightarrow \quad H_0 \text{ قبول الفرضية} \\ |(\overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{Y}})| > Z_{\,1-\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\mathrm{n}_1} + \frac{\sigma_2^2}{\mathrm{n}_2}} \quad \Rightarrow \quad H_0 \text{ رفض الفرضية} \end{cases}$$

وتكون قاعدة اتخاذ القرار إذا كانت الفرضية البديلة ذات الطرفين على الشكل التالي:

$$\begin{cases} Z_0 \epsilon \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}, Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \quad \Rightarrow \quad H_0 \text{ قبول الفرضية} \\ Z_0 \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}, Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \quad \Rightarrow \quad H_0 \text{ رفض الفرضية} \end{cases}$$

أما إذا كانت الفرضية البديلة ذات الطرف فتكون قاعدة اتخاذ القرار على الشكل التالي:

$$\begin{cases} |(\overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{Y}})| \leq Z_{\,1-\alpha} \sqrt{\frac{\mathrm{S}_1^2}{\mathrm{n}_1} + \frac{\mathrm{S}_2^2}{\mathrm{n}_2}} \quad \Rightarrow \quad H_0 \text{ قبول الفرضية} \\ |(\overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{Y}})| > Z_{\,1-\alpha} \sqrt{\frac{\mathrm{S}_1^2}{\mathrm{n}_1} + \frac{\mathrm{S}_2^2}{\mathrm{n}_2}} \quad \Rightarrow \quad H_0 \text{ رفض الفرضية} \end{cases}$$

وتكون قاعدة اتخاذ القرار إذا كانت الفرضية البديلة ذات الطرفين على الشكل التالي:

$$\begin{cases} T_0 \epsilon \left[-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}, t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}\right] \quad \Rightarrow \quad H_0 \text{ قبول الفرضية} \\ T_0 \notin \left[-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}, t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}\right] \quad \Rightarrow \quad H_0 \text{ رفض الفرضية} \end{cases}$$

أما إذا كانت الفرضية البديلة ذات الطرف فتكون قاعدة اتخاذ القرار على الشكل التالي:

$$\begin{cases} |(\overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{Y}}) - (\mu_1 - \mu_2)| \leq t_{1-\alpha} \mathrm{S_P} \sqrt{\frac{1}{\mathrm{n}_1} + \frac{1}{\mathrm{n}_2}} \Rightarrow \\ |(\overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{Y}}) - (\mu_1 - \mu_2)| > t_{\,1-\alpha} \mathrm{S_P} \sqrt{\frac{1}{\mathrm{n}_1} + \frac{1}{\mathrm{n}_2}} \;\Rightarrow \end{cases}$$

أمثلة:

المثال الأول:	المثال الثاني:
أخذت عينة حجمها 22 ومتوسطها 83 من المجتمع $N(\mu_1, 110)$ وأخذت عينة أخرى مستقلة عن الأولى حجمها 27 ومتوسطها 69 من المجتمع $N(\mu_2, 81)$. المطلوب: اختبار الفرضية $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ مقابل الفرضية $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$ عند مستوى المعنوية 0.05.	اختيرت عينة عشوائية مكونة من 11 طالبا من كلية الاقتصاد فوجد أن متوسط ذكائهم 80 درجة بانحراف معياري 7 درجات، واختيرت عينة عشوائية من 6 طلاب من كلية الآداب فوجد أن متوسط ذكائهم 75 درجة بانحراف معياري 5 درجات، هل يمكننا القول بأن متوسط ذكاء طلبة كلية الاقتصاد لا يساوي متوسط ذكاء طلبة كلية الآداب وذلك عند مستوى المعنوية 0.05؟
لدينا إحصاءة الاختبار هي: $$Z = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \backsim N(0,1)$$ وعندما نعتبر صحيحة H_0 تكون قيمة الإحصاءة هي: $$Z_0 = \frac{(83 - 69) - 0}{\sqrt{\frac{110}{22} + \frac{81}{27}}} = 4.95$$ عند مستوى المعنوية 0.05 وبما أن فرضية العدم ذات طرف فإن القيمة الجدولية تحسب كما يلي: $$\alpha = 0.05 \Longrightarrow Z_{1-\alpha} = Z_{0.95} = 1.645$$ نلاحظ أن القيمة المحسوبة Z_0 تقع في منطقة رفض H_0 ومنه نرفض H_0 ونقبل H_1 عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$.	نريد اختبار الفرضيات التالية: $$H_0: \mu_1 = \mu_2$$ $$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$ عندما نعتبر صحيحة H_0 تكون قيمة الإحصاءة هي: $$T_0 = \frac{(80 - 75)}{\sqrt{41}\left(\sqrt{\frac{1}{11} + \frac{1}{6}}\right)} = 1.54$$ عند مستوى المعنوية 0.05 وبما أن فرضية العدم ذات الطرفين فإن القيمة الجدولية تحسب كما يلي: $$\alpha = 0.05 \Longrightarrow t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2} = t_{0,975,15} = 2.131$$ نلاحظ أن القيمة المحسوبة Z_0 تقع في منطقة قبول H_0 ومنه نقبل H_0 ويمكن القول بأن متوسط ذكاء طلبة الاقتصاد يساوي متوسط ذكاء طلبة كلية الآداب وذلك عند مستوى المعنوية 0.05.

2.2.3. اختبارات الفرضيات حول الفرق بين متوسطي مجتمعين غير مستقلين

مجتمعين غير مستقلين

إذا كان حجم العينة $n \geq 30$

إحصاءة الاختبار هي:

$$Z = \frac{\overline{D} - \mu_D}{\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}} \backsim N(0,1)$$

وتكون قاعدة اتخاذ القرار إذا كانت الفرضية البديلة ذات الطرفين على الشكل التالي:

$$\begin{cases} Z_0 \epsilon \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}, Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] & \Longrightarrow \quad H_0 \text{ قبول الفرضية} \\ Z_0 \notin \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}, Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] & \Longrightarrow \quad H_0 \text{ رفض الفرضية} \end{cases}$$

أما إذا كانت الفرضية البديلة ذات الطرف فتكون قاعدة اتخاذ القرار على الشكل التالي:

$$\begin{cases} |\overline{D} - \mu_D| \leq Z_{\,1-\alpha} \dfrac{\sigma_D}{\sqrt{n}} & \Longrightarrow \quad H_0 \text{ قبول الفرضية} \\ |\overline{D} - \mu_D| > Z_{\,1-\alpha} \dfrac{\sigma_D}{\sqrt{n}} & \Longrightarrow \quad H_0 \text{ رفض الفرضية} \end{cases}$$

إذا كان حجم العينة $n < 30$

إحصاءة الاختبار هي:

$$T = \frac{\overline{D} - \mu_D}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \backsim t_{n-1}$$

وتكون قاعدة اتخاذ القرار إذا كانت الفرضية البديلة ذات الطرفين على الشكل التالي:

$$\begin{cases} T_0 \epsilon \left[-t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}, t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\right] & \Longrightarrow \quad H_0 \text{ قبول الفرضية} \\ T_0 \notin \left[-t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}, t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\right] & \Longrightarrow \quad H_0 \text{ رفض الفرضية} \end{cases}$$

أما إذا كانت الفرضية البديلة ذات الطرف فتكون قاعدة اتخاذ القرار على الشكل التالي:

$$\begin{cases} |\overline{D}| \leq t_{\,1-\alpha} \dfrac{\sigma_D}{\sqrt{n}} & \Longrightarrow \quad H_0 \text{ قبول الفرضية} \\ |\overline{D}| > t_{\,1-\alpha} \dfrac{\sigma_D}{\sqrt{n}} & \Longrightarrow \quad H_0 \text{ رفض الفرضية} \end{cases}$$

مثال:

يعطي الجدول التالي قياس ضغط الدم قبل وبعد تناول دواء معين لخمسة أشخاص:

قبل الدواء x_i	172	180	172	176	170
بعد الدواء y_i	168	174	173	178	157

المطلوب: اختبار الفرضيات التالية عند مستوى المعنوية 0.05 :

$$H_0 : \mu_d = 0$$
$$H_1 : \mu_d \neq 0$$

الحل:

d_i	4	6	-1	-2	13

$$\overline{D} = 4$$
$$S_D = 6.04$$

لدينا حجم العينة $n < 30$ ومنه إحصاءة الاختبار هي:

$$\mathrm{T} = \frac{\overline{\mathrm{D}} - \mu_{\mathrm{D}}}{\frac{\mathrm{S_D}}{\sqrt{\mathrm{n}}}} \sim \mathrm{t_{n-1}}$$

وعندما نعتبر صحيحة $\mathrm{H_0}$ تكون قيمة الإحصاءة هي:

$$\mathrm{T_0} = \frac{4}{6.04/\sqrt{5}} = 1.48$$

عند مستوى المعنوية 0.05 وبما أن فرضية العدم ذات طرفين فإن القيمة الجدولية تحسب كما يلي:

$$\alpha = 0.05 \Longrightarrow t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} = t_{0,975,4} = 2.776$$

نلاحظ أن القيمة المحسوبة T_0 تقع في منطقة قبول $\mathrm{H_0}$ ومنه نقبل $\mathrm{H_0}$ عند مستوى المعنوية 0.05.