3.3. مجال الثقة للنسبة في المجتمع

نميز بين حالتين:

العينة المستقلة

نعلم من توزيعات المعاينة أنه حسب نظرية النهاية المركزية توزيع $\widehat{P}$ يقترب من التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي P وتباينه $\frac{pq}{n}$ إذا كان حجم العينة $n \geq 30$، وعليه:

$$P\left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

ويمكن تعين مجال ثقة لنسبة المجتمع بمستوى ثقة % $100(1-\alpha)$ بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل كما يلي:

$$\left[\hat{p}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}, \hat{p}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{pq}{n}}\right]$$

ونلاحظ أن طرفي المجال متعلقان بمعلمتين مجهولتين p و q فيمكن تعويضها بتقديريهما غير المتحيزين $\hat{p}$ و $\hat{q}$ على الترتيب فيصبح مجال الثقة هو:

$$\left[\hat{p}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right]$$

العينة غير المستقلة

في هذه الحالة نستعمل معامل الإرجاع لحساب تباين نسبة العينة:

$$V(\widehat{P}) = \frac{pq}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

ويمكن تعين مجال ثقة لنسبة المجتمع بمستوى ثقة % $100(1-\alpha)$ بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل كما يلي:

$$\left[\hat{p}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}, \hat{p}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}\right]$$

مثال:

الحل	المثال
الصفة المدروسة هي تفضيل الزبون للمنتوج. حجم العينة $n = 200 > 30$ ومنه حسب نظرية النهاية المركزية: $$\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \sim N(0,1)$$ إذن مجال ثقة لنسبة المجتمع بمستوى ثقة $100(1-\alpha)\ \%$ بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل هو: $$\left[\hat{p} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right]$$ لدينا: $$\hat{p} = \frac{140}{200} = 0.7$$ $$1-\alpha = 0.95 \Longrightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.975 \Longrightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$ ومنه مجال الثقة هو: $$\left[0.7 - 1.96\sqrt{\frac{0.7\times 0.3}{200}}, 0.7 + 1.96\sqrt{\frac{0.7\times 0.3}{200}}\right] = [0.63,0.76]$$	تريد إحدى الشركات القيام بتسويق منتوج جديد، وقبل القيام بذلك قامت بدراسة السوق لمعرفة مدى تفضيل الزبائن لهذا المنتوج، فسحبت عينة عشوائية من 200 زبون فوجدت منهم 140 يفضلون هذا المسحوق. المطلوب: إيجاد مجال الثقة بمعامل ثقة 95٪ لنسبة الزبائن الذين يفضلون هذا المنتوج.

4.3. مجال الثقة للفرق بين نسبتي مجتمعين

إذا اختيرت عينتان عشوائيتان من مجتمعين مستقلين يخضع كل منهما لتوزيع الثنائي فإن الفرق بين نسبتي العينتين يخضع حسب نظرية النهاية المركزية عندما يكون حجم كل من العينتين كبيرا للتوزيع التالي:

$$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

ومنه:

$$P\left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1 - \alpha$$

ويمكن تعين مجال ثقة للفرق بين نسبتي مجتمعين بمستوى ثقة % $100(1-\alpha)$ بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل كما يلي:

$$\left[(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}, (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}\right]$$

ونلاحظ أن طرفي المجال متعلقان بمعلمتين مجهولتين p و q فيمكن تعويضها بتقديريهما غير المتحيزين $\hat{p}$ و $\hat{q}$ على الترتيب فيصبح مجال الثقة هو:

$$\left[(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1 \hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2 \hat{q}_2}{n_2}}, (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1 \hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2 \hat{q}_2}{n_2}}\right]$$

الحل	المثال
$\hat{p}_1 = \frac{80}{90} = 0.88$ $\hat{p}_2 = \frac{50}{70} = 0.71$ $1-\alpha = 0.90 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.95 \Rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.645$ $\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}} \backsim N(0,1)$ ويمكن تعين مجال ثقة للفرق بين نسبتي مجتمعين بمستوى ثقة % $100(1-\alpha)$ بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل كما يلي: $\left[(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}, (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}\right]$ بالتعويض نجد مجال الثقة الثقة بمعامل ثقة 90٪ للفرق بين نسبتي النجاح في المشفيين هو: $[0.071,0.278]$	سجلت 80 حالة نجاح عملية في مشفى A من بين 90 عملية وفي المشفى B سجلت 50 عملية نجاح من بين 70 عملية. المطلوب: إيجاد مجال الثقة بمعامل ثقة 90٪ للفرق بين نسبتي النجاح في المشفيين.

5.3. مجال الثقة لتباين مجتمع طبيعي

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من توزيع طبيعي متوسطه μ وتباينه σ^2 مجهول فإن طريقة تقدير هذا الأخير تكون حسب الحالتين التاليتين:

في حالة متوسط المجتمع معلوم

نعلم من نظرية المعاينة أن:

$$\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \lambda_n^2$$

ومنه:

$$P\left[\lambda^2_{n,\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \leq \lambda^2_{n,1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

ويمكن تعيين مجال ثقة لتباين مجتمع طبيعي بمستوى ثقة % $100(1-\alpha)$ بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل كما يلي:

$$\sigma^2 \in \left[\frac{n\hat{\sigma}^2}{\lambda^2_{n,1-\frac{\alpha}{2}}}, \leq \frac{n\hat{\sigma}^2}{\lambda^2_{n,\frac{\alpha}{2}}}\right]$$

في حالة متوسط المجتمع مجهول

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من توزيع طبيعي متوسطه μ وتباينه σ^2 مجهول، وكان s^2 تقديره غير المتحيز فإن:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \lambda_{n-1}^2$$

ومنه:

$$P\left[\lambda^2_{n,\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \lambda^2_{n,1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

ويمكن تعيين مجال ثقة لتباين مجتمع طبيعي بمستوى ثقة % $100(1-\alpha)$ بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل كما يلي:

$$\sigma^2 \in \left[\frac{(n-1)S^2}{\lambda^2_{n,1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n-1)S^2}{\lambda^2_{n,\frac{\alpha}{2}}}\right]$$

الحل	المثال
ليكن المتغير العشوائي X_i يمثل أوزان أكياس الأسمدة. $X \sim N(\mu, \sigma)$ متوسط المجتمع مجهول ومنه: $P\left[\lambda^2_{n,\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \lambda^2_{n,1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$ ويمكن تعيين مجال ثقة لتباين مجتمع طبيعي بمستوى ثقة % $100(1-\alpha)$ بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل كما يلي: $\sigma^2 \in \left[\frac{(n-1)S^2}{\lambda^2_{n,1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n-1)S^2}{\lambda^2_{n,\frac{\alpha}{2}}}\right]$ $1-\alpha = 0.95 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.975 \Rightarrow \lambda^2_{n,1-\frac{\alpha}{2}} = f_{0.975,19} = 32.9$ $1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow \lambda^2_{n,\frac{\alpha}{2}} = f_{0.025,9} = 8.91$ بالتعويض نجد مجال الثقة لـ σ^2 بمعامل ثقة 90٪ هو: $\left[\frac{(19)(1.5^2)}{32.9}, \frac{(19)(1.5^2)}{8.91}\right] = [1.29, 4.79][1.13, 2.18]$	تم قياس محتوى 20 كيسا من الأسمدة تمت تعبئتها بواسطة الآلة A فوجد أن انحرافها المعياري هو 1.5 كلغ، فإذا كان للأوزان التوزيع الطبيعي أوجد مجال الثقة بمعامل ثقة 90٪ للانحراف المعياري للمجتمع.

6.3. مجال الثقة لنسبة تبايني مجتمعين

في العديد من التجارب يكون الهدف مقارنة تبايني المجتمعين وإحدى الطرق المتبعة لهذا الغرض هي دراسة النسبة بين تباينين، فإذا كان S_1^2 تباين عينة عشوائية من مجتمع طبيعي متوسطه μ_1 وتباينه ${\sigma_1}^2$ و S_2^2 تباين عينة عشوائية من مجتمع طبيعي مستقل عن الأول متوسطه μ_2 وتباينه σ_2^2 فإن:

$$F = \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1}$$

ومنه:

$$P\left[f_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} \leq f_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1 - \alpha$$

ويمكن تعين مجال ثقة لنسبة تبايني مجتمعين بمستوى ثقة % $100(1-\alpha)$ بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل كما يلي:

$$\left[\frac{S_1^2}{S_2^2 f_{1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{S_1^2}{S_2^2 f_{\frac{\alpha}{2}}}\right]$$

الحل	المثال
$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{n_1-1,n_2-1}$$ $$1-\alpha = 0.95 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.975 \Rightarrow f_{1-\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1}$$ $$= f_{0.975,9,14} = 3.21$$ $$1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow f_{\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1} = f_{0.025,9,14}$$ $$= 0.26$$ ويمكن تعين مجال ثقة لنسبة تبايني مجتمعين بمستوى ثقة % $100(1-\alpha)$ بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل كما يلي: $$\left[\frac{S_1^2}{S_2^2 f_{1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{S_1^2}{S_2^2 f_{\frac{\alpha}{2}}}\right]$$ بالتعويض نجد مجال الثقة المطلوب هو: $$[0.35,4.32]$$	سحبت عينة من مجتمع طبيعي حجمها 10 بتباين 9 وسحبت عينة أخرى من مجتمع طبيعي آخر حجمها 15 بتباين 8 . أوجد فترة ثقة 95 ٪ لنسبة بين تبايني المجتمعين.