2.3. مجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين

في كثير من الأحيان نرغب في مقارنة متوسطي مجتمعين ويمكن التمييز بين الحالتين التاليتين:

1.2.3.مجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين مستقلين

يمكن التمييز بين حالتين:

التوزيعات الطبيعية المستقلة المعلومة التباين

لدينا:

$$Z = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \rightsquigarrow N(0,1)$$

ومنه:

$$P\left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1 - \alpha$$

أي أن مجال الثقة للمتوسط للفرق $\mu_1 - \mu_2$ بمستوى ثقة $100(1-\alpha)$ % من الثقة هو:

$$\left[(\overline{X} - \overline{Y}) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, (\overline{X} - \overline{Y}) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$$

التوزيعات الطبيعية المستقلة المجهولة التباين

إذا كان σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين نستبدلهما بـ S_1^2 و S_2^2 ونميز بين حالتين:

حالة العينات الكبيرة

مجال الثقة للمتوسط للفرق $\mu_1 - \mu_2$ بمستوى ثقة $100(1-\alpha)$ % من الثقة بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل هو:

$$\left[(\overline{X} - \overline{Y}) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}, (\overline{X} - \overline{Y}) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}\right]$$

حالة العينات الصغيرة

مجال الثقة للفرق $\mu_1 - \mu_2$ غير واضح باستثناء الحالة التي يكون فيها $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$.

مجال الثقة للفرق $\mu_1 - \mu_2$ بمستوى ثقة $100(1-\alpha)$ % من الثقة بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل هو:

$$\left[(\overline{X} - \overline{Y}) - t_{1-\frac{\alpha}{2}} S_P \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, (\overline{X} - \overline{Y}) + t_{1-\frac{\alpha}{2}} S_P \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right]$$

أمثلة:

المثال الأول:	المثال الثاني:
من مجتمع طبيعي متوسطه مجهول وتباينه $\sigma^2 = 25$ سحبنا عينة عشوائية حجمها 9 فكان متوسطها 32، ومن مجتمع طبيعي آخر مستقل عن الأول متوسطه مجهول وتباينه $\sigma^2 = 40$ سحبنا عينة عشوائية حجمها 10 فكان متوسطها 47. المطلوب: إيجاد مجال الثقة بمعامل ثقة 95٪ للفرق بين متوسطي المجتمعين.	أوجد مجال الثقة بمعامل ثقة 95٪ للفرق $\mu_1 - \mu_2$ إذا علمت أن حجم العينة الأولى 8 ووسطها 81.2 وتباينها 7.6 وحجم العينة الثانية 7 ووسطها وتباينها هما76.4 و 8.2 على الترتيب.
مجال الثقة للفرق $\mu_1 - \mu_2$ بمستوى ثقة $100(1-\alpha)$ % من الثقة هو: $$\left[(\overline{X}-\overline{Y}) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}, (\overline{X}-\overline{Y}) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$$ $$1-\alpha = 0.95 \Longrightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.975 \Longrightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$ ومنه مجال الثقة للفرق $\mu_1 - \mu_2$ بمعامل ثقة 95٪ هو: $$\left[(32-47) - 1.96\sqrt{\frac{25}{9}+\frac{40}{10}}, (32-47) + 1.96\sqrt{\frac{25}{9}+\frac{40}{10}}\right]$$ $$= [-20.1, -9.9]$$	مجال الثقة للمتوسط للفرق $\mu_1 - \mu_2$ بمستوى ثقة $100(1-\alpha)$ % من الثقة بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل هو: $$\left[(\overline{X}-\overline{Y}) - t_{1-\frac{\alpha}{2}}S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}, (\overline{X}-\overline{Y}) + t_{1-\frac{\alpha}{2}}S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right]$$ لدينا: $$1-\alpha = 0.95 \Longrightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.975 \Longrightarrow t_{1-\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2} = 2.16$$ $$S_P^2 = \frac{7.6(8-1)+8.2(7-1)}{8+7-2} = 7.87$$ ومنه مجال الثقة للفرق $\mu_1 - \mu_2$ بمعامل ثقة 95٪ هو: $$[2.28, 8.52]$$

2.2.3. مجال الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين غير مستقلين

يمكن التمييز بين حالتين:

لدينا:

$$Z = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \rightsquigarrow N(0,1)$$

ومنه:

$$P\left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1 - \alpha$$

أي أن مجال الثقة للمتوسط للفرق $\mu_1 - \mu_2$ بمستوى ثقة $100(1-\alpha)$ % من الثقة هو:

$$\left[(\overline{X} - \overline{Y}) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, (\overline{X} - \overline{Y}) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$$

التوزيعات الطبيعية المستقلة المجهولة التباين

إذا كان σ_1^2 و σ_2^2 مجهولين نستبدلهما بـ S_1^2 و S_2^2 ونميز بين حالتين:

حجم العينة $n \geq 30$

$$\overline{D} \rightsquigarrow N\left(\mu_D, \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}\right)$$

وبمعلومية تباين عينة الفروق ووسطها كمقدرين لوسط مجتمع الفروق وتباينه يكون:

$$Z = \frac{\overline{D} - \mu_D}{\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}} \rightsquigarrow N(0,1)$$

ويمكن تعين مجال ثقة تقريبي لمتوسط مجتمع الفروق بمستوى ثقة $100(1-\alpha)$ % بعد إجراء عمليات التبسيط و التحويل كما يلي:

$$\left[\overline{D} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}, \overline{D} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}\right]$$

حجم العينة $n < 30$

$$T = \frac{\overline{D} - \mu_D}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \rightsquigarrow t_{n-1}$$

ويمكن تعين مجال ثقة لمتوسط مجتمع الفروق بمستوى ثقة $100(1-\alpha)$ % بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل كما يلي:

$$\left[\overline{D} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S_D}{\sqrt{n}}, \overline{D} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S_D}{\sqrt{n}}\right]$$

أمثلة:

المثال الأول:	المثال الثاني:
من مجتمع طبيعي متوسطه مجهول وتباينه $\sigma^2 = 25$ سحبنا عينة عشوائية حجمها 9 فكان متوسطها 32، ومن مجتمع طبيعي آخر مستقل عن الأول متوسطه مجهول وتباينه $\sigma^2 = 40$ سحبنا عينة عشوائية حجمها 10 فكان متوسطها 47. المطلوب: إيجاد مجال الثقة بمعامل ثقة 95٪ للفرق بين متوسطي المجتمعين.	أوجد مجال الثقة بمعامل ثقة 95٪ للفرق $\mu_1 - \mu_2$ إذا علمت أن حجم العينة الأولى 8 ووسطها 81.2 وتباينها 7.6 وحجم العينة الثانية 7 ووسطها وتباينها هما76.4 و 8.2 على الترتيب.
مجال الثقة للفرق $\mu_1 - \mu_2$ بمستوى ثقة $100(1-\alpha)$ % من الثقة هو: $$\left[(\overline{X}-\overline{Y}) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}, (\overline{X}-\overline{Y}) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$$ $$1-\alpha = 0.95 \Longrightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.975 \Longrightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$ ومنه مجال الثقة للفرق $\mu_1 - \mu_2$ بمعامل ثقة 95٪ هو: $$\left[(32-47) - 1.96\sqrt{\frac{25}{9}+\frac{40}{10}}, (32-47) + 1.96\sqrt{\frac{25}{9}+\frac{40}{10}}\right]$$ $$= [-20.1, -9.9]$$	مجال الثقة للمتوسط للفرق $\mu_1 - \mu_2$ بمستوى ثقة $100(1-\alpha)$ % من الثقة بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل هو: $$\left[(\overline{X}-\overline{Y}) - t_{1-\frac{\alpha}{2}}S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}, (\overline{X}-\overline{Y}) + t_{1-\frac{\alpha}{2}}S_P\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right]$$ لدينا: $$1-\alpha = 0.95 \Longrightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.975 \Longrightarrow t_{1-\frac{\alpha}{2}, n_1+n_2-2} = 2.16$$ $$S_P^2 = \frac{7.6(8-1) + 8.2(7-1)}{8+7-2} = 7.87$$ ومنه مجال الثقة للفرق $\mu_1 - \mu_2$ بمعامل ثقة 95٪ هو: $$[2.28, 8.52]$$

مثال:

تم قياس نبض القلب لعينة مكونة من 6 رياضيين فكانت النتائج كما يلي:

قبل التمرين	72	70	60	65	70	67
بعد التمرين	99	90	80	93	95	90

المطلوب: إيجاد مجال الثقة بمعامل ثقة 90٪ لفرق متوسطي النبض بفرض أن المجتمع طبيعي.

الحل:

d_i	27	20	20	28	25	23

$$n = 6 < 30$$

أي أن مجال الثقة لمتوسط مجتمع الفروق بمستوى ثقة $100(1-\alpha)$ % بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل هو:

$$\left[\overline{D} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S_D}{\sqrt{n}}, \overline{D} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S_D}{\sqrt{n}}\right]$$

بالتعويض نجد مجال الثقة هو:

$$\left[23.83 - (2.015)\frac{3.43}{\sqrt{6}}, 23.83 + (2.015)\frac{3.43}{\sqrt{6}}\right] = [21.009, 26.65]$$

$$1 - \alpha = 0.90 \Longrightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95 \Longrightarrow t_{0.95,5} = 2.015$$

$$\overline{D} = \frac{\sum d_i}{n} = 23.83$$

$$S_D = \sqrt{\frac{\sum(d_i - \overline{D})^2}{n-1}} = 3.43$$