3. التقدير بمجال:

إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي بدلالة المعلمة θ مقدرها النقطي $\hat{\theta}$ فإن هذه القيمة الوحيدة للمقدر لا تعطي فكرة على دقة التقدير، لذلك نلجأ إلى تكوين مجال $[L_1, L_2]$ يشمل القيمة الحقيقية للمعلمة المجهولةθ باحتمال معين حيثL_1, L_2 إحصاءات متعلقة بالعينة، ونقول عن المجال $[L_1, L_2]$ أنه مجال الثقة بمستوى % $100(1-\alpha)$ من الثقة لـ θ إذا كان: $P[L_1, L_2] = 1 - \alpha$

1.3. مجال الثقة لمتوسط مجتمع

يمكن التمييز بين حالتين:

- **المعاينة للوسط الحسابي $\bar{X}$ عند المعاينة من مجتمع طبيعي:** ونميز فيها بين حالتين:

مجتمع طبيعي تباينه معلوم

لدينا:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \backsim N(0,1)$$

أي أن مجال الثقة للمتوسط μ هو:

$$\left[\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

بمستوى $100(1-\alpha)$ % من الثقة.

ملاحظة:

إذا كانت العينات العشوائية المسحوبة من مجتمعات غير طبيعية ذات تباين σ^2 معلوم وحجمها $n \geq 30$ يمكن تطبيق نظرية النهاية المركزية والحصول على نفس المجال السابق الذي يكون تقريبيا.

مجتمع طبيعي تباينه مجهول

لدينا:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \backsim N(0,1)$$

إذا كان σ مجهول نستبدله بـ S ونميز بين حالتين:

حجم العينة $n \geq 30$

حسب نظرية النهاية المركزية:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \backsim N(0,1)$$

ويمكن تعين مجال ثقة تقريبي لمتوسط المجتمع μ بمستوى ثقة $100(1-\alpha)$ % بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل كما يلي:

$$\left[\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

حجم العينة $n < 30$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \backsim t_{n-1}$$

ويمكن تعين مجال ثقة تقريبي لمتوسط المجتمع μ بمستوى ثقة $100(1-\alpha)$ % بعد إجراء عمليات التبسيط والتحويل كما يلي:

$$\left[\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

أمثلة:

المثال الأول:	**المثال الثاني:**
من مجتمع طبيعي متوسطه مجهول وتباينه $\sigma^2 = 16$ سحبنا عينة عشوائية حجمها 20 فكان متوسطها 9. المطلوب: إيجاد مجال الثقة بمعامل ثقة 95٪ لمتوسط المجتمع μ.	سحبت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي تباينه مجهول حجمها 10 فكان متوسطها 8.5 وانحرافها المعياري 1.58. المطلوب: إيجاد مجال الثقة بمعامل ثقة 95٪ لمتوسط المجتمع μ.
لدينا: $Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$ مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ بمعامل ثقة 95٪ هو: $\left[\overline{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ لدينا: $1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \Rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.975} = 1.96$ ومنه مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ بمعامل ثقة 95٪ هو: $\left[9 - 1.96\frac{4}{\sqrt{20}}, 9 + 1.96\frac{4}{\sqrt{20}}\right] = [7.25,10.75]$	σ مجهول و $n < 30$ ومنه: $T = \frac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$ مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ بمعامل ثقة 95٪ هو: $\left[\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$ لدينا: $1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \Rightarrow t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} = 2.262$ ومنه مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ بمعامل ثقة 95٪ هو: $\left[8.5 - 2.262\frac{1.58}{\sqrt{10}}, 8.5 + 2.262\frac{1.58}{\sqrt{10}}\right] = [7.31,9.69]$

ملاحظة:

عند تقدير متوسط المجتمع μ بمتوسط العينة $\bar{X}$ يرتكب خطأ يسمى الخطأ المطلق للتقدير وهو القيمة المطلقة للفرق بين المقدر النقطي $\bar{X}$ والمتوسط المجهول μ ، وبفرض أن حد الخطأ الأكبر المسموح به والذي يتم تحديده من قبل الباحث مسبقا هو:

$$d = \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

فبحل المتباينة:

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq d$$

يمكن تحديد حجم العينة المناسب لعدم تجاوز حد الخطأ الأكبر كما يلي:

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq d \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{d}{\sigma Z_{1-\frac{\alpha}{2}}} \Rightarrow n \geq \left(\frac{\sigma Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{d}\right)^2$$

وإذا كان σ مجهول نستبدله بتقديره غير المتحيز S.