الفصل الثاني:

نظرية التقدير

1. مفاهيم أساسية

من أهم المفاهيم المرتبطة بنظرية التقدير ما يلي:

- **التقدير:** هو أسلوب إحصائي يعتمد على حساب بعض الإحصاءات من بيانات العينة التي تعطي قيم تقريبية للمعلمات المناظرة لها في المجتمع الإحصائي المختارة منه.
- **المقدر:** هو إحصاءة تحدد كيفية استخدام بيانات العينة لتقدير معلمة المجتمع الإحصائي المجهولة.
- **درجة التأكد أو مستوى الثقة:** تحديد مجال الثقة للمعلمة يرفق بتحديد احتمال تحققه، أي باحتمال أن تنتمي المعلمة إلى المجال المذكور ويرمز لهذا الاحتمال بـ $(1-\alpha)$ ويسمى درجة التأكد أو مستوى الثقة، أما الاحتمال المعاكس α يسمى مستوى أو درجة المعنوية.
- **معاملات الثقة:** هي القيم الجدولية للمتغير Z أو t أو غيرها حسب الحالة.

2. التقدير النقطي (التقدير بقيمة واحدة)

التقدير النقطي هو: تقدير إحدى معلمات المجتمع بإعطائها قيمة عددية واحدة.

1.2. طرق التقدير النقطي

ويمكن الاعتماد على الطرق التالية في عملية التقدير:

<table>
<tr><th>طريقة العزوم</th><th>طريقة المعقولية العظمى</th></tr>
<tr><td>تعد هذه الطريقة من أبسط طرق إيجاد تقدير معلمة مجهولة، وهي تعتمد على مساواة العزم الرياضي بالعزم الإحصائي المقابل لهذه العينة، أي أنه إذا كانت المعلمة هي عزم للتوزيع فإن تقدير هذه المعلمة هو عزم العينة المناظر.</td><td>

ليكن المتغير العشوائي X من توزيع دالة كثافته الاحتمالية $f(x,\theta)$ حيث θ معلمة التوزيع وهي مجهولة، فإذا كانت $X_1, X_2, \dots\dots, X_n$ عينة عشوائية حجمها n من هذا التوزيع فإن دالة المعقولية العظمى لهذه العينة تعرف كما يلي:

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$$

أي أن دالة المعقولية العظمى هي دالة في المعلمة المجهولة θ وتبلغ $\mathrm{L}(\theta)$ قيمتها العظمى عند قيم نسميها $\hat{\theta}$ ، وهي تقدير لـ θ و حل للجملة التالية:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{dL}(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0 \\ \dfrac{\mathrm{d}^2\mathrm{L}(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2}<0 \end{cases}$$

وبما أن $\mathrm{L}(\theta)$ تبلغ نهايتها العظمى عند نفس النقطة التي تبلغ عندها الدالة $LogL(\theta)$ نهايتها العظمى وبهدف تسهيل الحسابات سوف نحدد قيمة θ التي هي حل للجملة:

$$\begin{cases} \dfrac{dLogL(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0 \\ \dfrac{d^2LogL(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2}<0 \end{cases}$$

ففي الحالة التي تكون فيها $f(x)$ تابعة لعدة معلمات مجهولة $\theta_1, \theta_2, \dots\dots, \theta_k$ فإن المقدرات $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots\dots, \hat{\theta}_k$ على الترتيب هي إحصاءات العينة التي قيمها حلول للجملة التالية:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{dLogL}(\theta)}{\mathrm{d}\theta_1}=0, \dfrac{\mathrm{dLogL}(\theta)}{\mathrm{d}\theta_2}=0, \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \dfrac{\mathrm{dLogL}(\theta)}{\mathrm{d}\theta_k}=0 \\ \dfrac{\mathrm{d}^2\mathrm{LogL}(\theta)}{\mathrm{d}{\theta_1}^2}<0, \dfrac{\mathrm{d}^2\mathrm{LogL}(\theta)}{\mathrm{d}{\theta_2}^2}, \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \dfrac{\mathrm{d}^2\mathrm{LogL}(\theta)}{\mathrm{d}{\theta_k}^2} \end{cases}$$

</td></tr>
</table>

أمثلة:

<table>
<tr><th>المثال الأول</th><th>المثال الثاني</th></tr>
<tr><td>ليكن متغير عشوائي X حيث: $X \sim N(\mu,\sigma)$
فإذا كانت $X_1, X_2, \dots\dots, X_n$ عينة عشوائية لـ X أوجد مقدر لـ μ و σ^2 بطريقة المعقولية العظمى.</td><td rowspan="2">إذا كانت $X_1, X_2, \dots\dots, X_n$ عينة عشوائية من توزيع ذات الحدين $b(1,p)$ فإن:
$$E(X) = p$$
ولإيجاد التقدير النقطي لمعلمة النسبة p نضع :
$$E(X) = \overline{X}$$
أي:
$$\hat{p} = \overline{X}$$
ومنه فإن التقدير النقطي للنسبة p هو:
$$\hat{p} = \overline{X}$$</td></tr>
<tr><td>**الحل:**
$$f(x_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2}$$
نضع:
$$\mu = \theta_1$$ $$\sigma^2 = \theta_2$$
دالة المعقولية العظمى في هذه الحالة هي:
$$L(\mu,\sigma^2) = \frac{-n}{2}\mathrm{Log}2\pi - \frac{n}{2}\mathrm{Log}\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu)^2$$
ومنه:
$$\begin{cases} \dfrac{d\mathrm{Log}L(\mu)}{d\mu} = \dfrac{(x_i-\mu)}{\sigma^2} = 0 \\ \dfrac{d\mathrm{Log}L(\sigma^2)}{d\sigma^2} = \dfrac{-n}{2\sigma^2} + \dfrac{\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum x_i - n\mu = 0 \\ -n + \dfrac{\sum(x_i-\mu)^2}{\sigma^2} = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{\mu} = \dfrac{1}{n}\sum x_i = \overline{X} \\ \hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum(x_i-\overline{X})^2 \end{cases}$$
أي أن $\overline{X}$ هو مقدر لـ μ و $\hat{\sigma}^2$ هو مقدر لـ σ^2.</td></tr>
</table>

2.2. مميزات المقدر النقطي

بما أن المقدر متغير عشوائي فإنه من المنطقي أن نعتبر المقدر الجيد هو ذلك المقدر الذي يتمركز حول المعلمة ويحقق الشروط التالية:

عدم التحيز	الكفاءة	التقارب	الكفاية
نقول عن إحصائية ما بأنها مقدر غير متحيز لمعلمة المجتمع إذا كان متوسطها أو توقعها الرياضي مساويا لمعلمة المجتمع أي أن : $E(\hat{\theta}) = \theta$ **مثال:** - متوسط العينة $\bar{X}$ هو تقدير غير متحيز لمتوسط المجتمع μ. - تباين العينة S^2 هو تقدير غير متحيز لتباين المجتمع σ^2. - $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{X})^2$ الذي وجدناه بتطبيق نظرية المعقولية العظمى هو تقدير متحيز لـ σ^2. لأن: $E(\hat{\sigma}^2) \neq \sigma^2$	إذا كان للمعلمة أكثر من مقدر فإن المقدر الأكفأ هو المقدر الذي له أقل تباين، فالكفاءة خاصية نسبية تستخدم للمقارنة بين المقدرات المختلفة لنفس المعلمة وبنفس حجم العينة، ويكون المقدر الأكفأ هو الذي يعطي تقديرات قريبة من المعلمة المجهولة.	المقدر المتقارب هو الذي يؤول إلى قيمة المعلمة المقدرة عندما يؤول حجم العينة إلى ما لا نهاية، ويتحقق ذلك مثلا بأن يؤول تباينه إلى الصفر كمتوسط العينة الذي يعد مقدرا متقاربا لمتوسط المجتمع.	يتميز المقدر بصفة الكفاية إذا كان يضم جميع أو أغلب مشاهدات العينة، بحيث لا يوجد مقدر غيره يمكن أن يضم تلك المشاهدات، كالوسط الحسابي للعينة المسحوبة من مجتمع طبيعي هو مقدر كاف مقارنة بالوسيط والمنوال، حيث أنه يعتمد على جميع المشاهدات بخلافهما.

3.2. التقديرات النقطية غير المنحازة لمقاييس المجتمع:

التقدير النقطي غير المنحاز لمتوسط المجتمع	التقدير النقطي غير المنحاز لتباين المجتمع	التقدير النقطي غير المنحاز لنسبة المجتمع
المقدر $\bar{X}$ هو مقدر غير متحيز لوسط مجتمع μ يتبع التوزيع الطبيعي حيث: $E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(x_i)$ $= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu$ $= \frac{1}{n} n\mu = \mu$	المقدر S^2 هو مقدر غير متحيز لتباين المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي σ^2 حيث: $\mathrm{E}(\mathrm{S}^2) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{\mathrm{n}-1}\sum (x_{\mathrm{i}} - \bar{\mathrm{X}})^2\right)$ $= \mathrm{E}\left(\frac{1}{\mathrm{n}-1}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{E}(x_{\mathrm{i}} - \mu)^2 - \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}-1}\mathrm{E}(\bar{\mathrm{X}} - \mu)^2\right)$ $= \frac{1}{\mathrm{n}-1}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{V}(\mathrm{X}_{\mathrm{i}}) - \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}-1}\mathrm{V}(\bar{\mathrm{X}})$ $= \frac{1}{\mathrm{n}-1}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \sigma^2 - \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}-1}\frac{\sigma^2}{\mathrm{n}}$ $= \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}-1}\sigma^2 - \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}-1}\left(\frac{\sigma^2}{\mathrm{n}}\right) = \sigma^2$	المقدر $\hat{p}$ هو مقدر غير متحيز لنسبة المجتمع p حيث: $\mathrm{E}(\hat{\mathrm{P}}) = \mathrm{E}\left(\frac{x}{\mathrm{n}}\right) = \frac{1}{\mathrm{n}}\mathrm{E}(x) = \mathrm{p}$