2.3.3. شكل توزيع المعاينة للنسبة

حسب نظرية النهاية المركزية فإن توزيع$\hat{P}$ يقترب من التوزيع الطبيعي الذي وسطه p وتباينه $\frac{pq}{n}$ إذا كان حجم العينة $n \geq 30$، ونكتب:

$$\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \sim N(0,1)$$

مثال:

المثال	الحل
إذا كان احتمال نجاح الطالب في أحد المقاييس هو 0.9، اختيرت عينة حجمها 49 طالبا من الطلبة الذي يدرسون هذا المقياس أوجد $P\left(\hat{P} \geq 0.8\right)$.	الصفة المدروسة هي نجاح الطالب. نعلم أن: $$\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \sim N(0,1)$$ وعليه يكون الاحتمال المطلوب حسابه كما يلي: $$P(\hat{p} \geq 0.8) = P\left(\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \geq \frac{0.8-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right) = P(Z \geq -2.33)$$ $$= 1 - P(Z \leq -2.33)$$ $$= 1 - [1 - P(Z \leq 2.33)] = 0.9901$$

4.3. توزيع المعاينة للفرق بين نسبتي عينتين

إذا اختيرت عينتان عشوائيتان من مجتمعين مستقلين يخضع كل منهما لتوزيع الثنائي فإن الفرق بين نسبتي العينتين يخضع حسب نظرية النهاية المركزية عندما يكون حجم كل من العينتين كبيرا للتوزيع التالي:

$$\frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

المثال:	الحل:
إذا كانت نسبة النجاح في الامتحان التوجيهي في إحدى الجامعات هي0.7 وكانت نسبة النجاح في الامتحان التوجيهي في جامعة أخرى هي 0.65، تم اختيار عينة عشوائية حجمها 70 طالبا من الجامعة الأولى وعينة عشوائية أخرى من الجامعة الثانية حجمها 35 طالبا، فما هو احتمال أن تزيد نسبة النجاح في الجامعة الأولى على نسبة النجاح في الجامعة الثانية بمقدار 0.1 على الأكثر؟	لدينا: $$\frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$ والاحتمال المطلوب هو: $$P(\hat{p}_1-\hat{p}_2\le 0.1)=P\left(\frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}}}\le\frac{0.1-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}}}\right)$$ $$=\ P(Z\le 0.51)=0.6950$$

.5.3 توزيع المعاينة لتباين عينة

نحتاج في كثير من الأحيان في تطبيقات الإحصاء الاستقرائي لمعرفة توزيع تباين العينة الذي يختلف حسب الحالتين التاليتين:

متوسط المجتمع معلوم

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من توزيع طبيعي متوسطه μ وتباينه σ^2 فإن:

$$\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \lambda_n^2$$

حيث:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum(x_i - \mu)^2}{n}$$

متوسط المجتمع مجهول

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من توزيع طبيعي متوسطه μ وتباينه σ^2 مجهول و s^2 تقديره غير المتحيز فإن:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \lambda_{n-1}^2$$

حيث يستعمل الوسط الحسابي للعينة $\overline{X}$كمقدر لمتوسط المجتمعμ :

$$S^2 = \frac{\sum(x_i - \overline{X})^2}{n-1}$$

مثال:

الحل:	**المثال:**
لدينا: $$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \lambda^2_{n-1}$$ ومنه يحسب الاحتمال المطلوب كما يلي: $$P(S^2 \le 87.5) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le \frac{87.5(n-1)}{\sigma^2}\right) = P(\lambda^2 \le 12.5)$$ $$= 0.75$$	سحبت عينة عشوائية حجمها 11 من توزيع طبيعي تباينه 70، أوجد احتمال أن يقل تباين العينة عن 87.5.

6.3. توزيع المعاينة لنسبة بين تبايني عينتين

للمقارنة بين تبايني مجتمعين نعتمد على النسبة بين تبايني عينتين مسحوبتين منهما، والتي يحدد توزيعها في حالة المعاينة من مجتمعين طبيعيين مستقلين استنادا إلى النظرية التالية:

إذا كان S_1^2 تباين عينة عشوائية من مجتمع طبيعي متوسطه μ_1 وتباينه σ_1^2 و S_2^2 تباين عينة عشوائية من مجتمع طبيعي مستقل عن الأول متوسطه μ_2 وتباينه σ_2^2 فإن:

$$F = \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1}$$

حيث: S_1^2 هو أكبر تباين.

مثال:

الحل:	**المثال:**
نعلم أن: $$F = \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1}$$ وبالتالي يكون الاحتمال المطلوب: $$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} < 0.8\right) = P\left(\frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} < 0.8\left(\frac{25}{9}\right)\right)$$ $$= P(F < 2.22) = 0.95$$	سحبت عينة حجمها 11 من مجتمع طبيعي تباينه 9 وسحبت عينة أخرى حجمها 21 من مجتمع طبيعي مستقل عن الأول تباينه 25، أحسب احتمال أن تكون النسبة بين تبايني العينتين أقل من 0.8.