3.توزيعات المعاينة

توزيعات المعاينة هي: التوزيع الاحتمالي لإحصاءات العينة الذي يمكن الحصول عليه من خلال دراسة العلاقة بين إحصاءة العينة ومعالم المجتمع عن طريق سحب عينة عشوائية حجمها n وتكرار العملية للحصول على جميع العينات الممكنة.

3.1. توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينة $\overline{X}$

1.3.1.متوسط وتباين العينة

إذا كانت $X_1, X_2, \ldots.., X_n$ عينة عشوائية متطابقة التوزيع، أي لكل منها متوسط μ وتباين σ^2 فإن متوسط العينة وتباينها يعرفان بالعلاقة التالية:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2$$

حيث : n حجم العينة.

أما الوسط الحسابي للمجتمع وتباينه فيعرفان كما يلي:

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2$$

حيث: N حجم المجتمع.

2.3.1.متوسط وتباين توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{X}$

إن الوسط الحسابي للمجتمع μ هو مقدار ثابت، أما الوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ فتختلف قيمته من عينة لأخرى، فهو بذلك متغير عشوائي له توزيع احتمالي يسمى توزيع المعاينة الذي نتحصل عليه بدراسة العينات الممكنة التي لها نفس الحجم في المجتمع المدروس، ونميز بين حالتين:

حالة العينة المستقلة (السحب بإرجاع)

في حالة السحب بإرجاع فإن حجم المجتمع N لا يتغير عند سحب مفردة من مفرداته، ومن ثم تكون المشاهدات مستقلة عن بعضها البعض، ويتحقق هذا الاستقلال الإحصائي عندما يكون حجم المجتمع N كبيرا مقارنة بحجم العينة n وتكون بذلك النسبة بينهما أقل من 0.05.

$$E(\bar{X}) = \mu$$

$$V(\bar{X}) = \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

العينة غير المستقلة (السحب بدون إرجاع)

في حالة السحب بدون إرجاع فإن سحب مفردة من المجتمع لتكوين العينة يؤثر على سحب أي مفردة أخرى، فيتحقق عدم الاستقلال الإحصائي، ويتحدد الوسط الحسابي وتباين الوسط الحسابي العيني كما يلي:

$$E(\bar{X}) = \mu$$

$$V(\bar{X}) = \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

حيث:

$\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$: معامل الإرجاع الذي يمكن إهماله إذا كان حجم العينة صغيرا جدا مقارنة بحجم المجتمع ($\frac{n}{N} < 0.05$).

أمثلة:

المثال الأول:	المثال الثاني:
أحسب الوسط الحسابي وتباين الوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ إذا علمت أن العينة العشوائية التي حجمها $n = 10$ أختيرت من مجتمع لا نهائي وسطه الحسابي 70 وتباينه 50.	حساب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع معاينة $\bar{X}$ إذا اختيرت عينة حجمها $n = 500$ مفردة من مجتمع حجمه $N = 600$ مفردة، ووسطه الحسابي وانحرافه المعياري هما 26، 3 على الترتيب.
الحل: بما أن السحب تم من مجتمع لا نهائي فهذا يعني تحقق الاستقلال الإحصائي وعليه يمكن حساب الوسط الحسابي وتباين الوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ بالاعتماد على النظرية السابقة كما يلي: $E(\bar{X}) = \mu = 70$ $V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = 5$	**الحل:** $\frac{n}{N} = \frac{500}{600} = 0.073 > 0.05$ ومنه نستنتج عدم تحقيق الاستقلال الإحصائي، ومن ثم فإن الوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة $\bar{X}$ يحسبان كما يلي: $E(\bar{X}) = \mu = 26$ $V(\bar{X}) = \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ $= \frac{9}{500}\left(\frac{600-500}{600-1}\right) = 0.127$

ملاحظة:

يمكن تعميم النظرية السابقة على عينتين من مجتمعين مستقلين بناء على النظرية التالية:

إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_{n_1}$ عينة من توزيع وسطه μ_1 وتباينه σ_1^2، وأخذت عينة أخرى $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_2}$ من توزيع أخر مستقل عن الأول متوسطه μ_2 وتباينه σ_2^2 فإن:

$$E(\bar{X}-\bar{Y}) = \mu_1 - \mu_2$$

$$V(\bar{X}-\bar{Y}) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

إذا تم اختيار عينة حجمها $n_1 = 30$ من توزيع وسطه $\mu_1 = 60$ وتباينه $\sigma_1^2 = 15$ ، وعينة أخرى حجمها $n_2 = 60$ من توزيع أخر مستقل عن الأول وسطه $\mu_2 = 75$ وتباينه $\sigma_2^2 = 25$. المطلوب: حساب: $E(\bar{X}-\bar{Y})$، $V(\bar{X}-\bar{Y})$.	$E(\bar{X}-\bar{Y}) = \mu_1 - \mu_2 = 60 - 75 = -15$ $V(\bar{X}-\bar{Y}) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} = \frac{25}{60} + \frac{15}{30} = 0.91$

3.3.1. شكل توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي $\bar{X}$

يمكن التمييز بين حالتين:

- **توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{X}$ عند المعاينة من مجتمع طبيعي:** ونميز فيها بين حالتين:

المعاينة من مجتمع طبيعي تباينه معلوم

إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية من مجتمع طبيعي وسطه μ وتباينه σ^2 فإن المتغير العشوائي $\overline{X}$ يخضع للتوزيع الطبيعي متوسطه μ وتباينه $\sigma_{\bar{X}}$.

$$\overline{X} \backsim N(\mu, \sigma_{\overline{X}})$$

ونكتب:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_{\overline{X}}} \backsim N(0,1)$$

وإذا كانت قيمة $n \geq 30$ فإن التقريب يكون جيدا

المعاينة من مجتمع طبيعي تباينه مجهول

من الناحية العملية غالبا ما يكون تباين مجتمع الدراسة مجهولا فيستبدل بتقديره غير المتحيز S^2، ويمكن التمييز بين حالتين لتحديد توزيع المتغير:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

حجم العينة $n \geq 30$

المتغير $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ يقترب توزيعه من التوزيع الطبيعي المعياري استنادا إلى نظرية النهاية المركزية:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \backsim N(0,1)$$

حجم العينة $n < 30$

المتغير $T = \frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}$ يتبع توزيع ستودنت:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \backsim t_{n-1}$$

أمثلة:

المثال الثاني:	المثال الأول
إذا علمت أن نقاط الطلبة في مقياس الإحصاء تخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط قدره 11 نقطة، تم اختيار عينة حجمها 36 طالبا من هذا المجتمع فوجد أن انحرافها المعياري هو 3 نقاط. المطلوب: حساب $P(\bar{X} > 13)$	إذا كان الدخل الأسبوعي لعمال إحدى الشركات يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط قدره 1200 وحدة نقدية وانحراف معياري قدره 100 وحدة نقدية، ما هو احتمال أن يكون متوسط دخل عينة حجمها $n = 64$ أكبر من 1180 وحدة نقدية في الأسبوع؟
الحل: ليكن المتغير العشوائي X_i يمثل نقاط الطلبة في مقياس الاحصاء. $X \backsim N(\mu, \sigma)$ $X \backsim N(11, \sigma)$ لدينا σ مجهول و $n \geq 30$ ومنه: $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \backsim N(0,1)$ وبالتالي يكون الاحتمال المطلوب: $P(\bar{X} > 13) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} > \frac{13 - \mu}{s/\sqrt{n}}\right) = P\left(Z > \frac{13 - 11}{3/\sqrt{36}}\right)$ $= P(Z > 4) = 1 - P(Z \leq 4) = 1 - 0.99995$ $= 0.00005$	**الحل:** ليكن المتغير العشوائي X_i يمثل الدخل الأسبوعي للعمال. $X \backsim N(\mu, \sigma)$ $X \backsim N(1200,100)$ $\bar{X} \backsim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ ومنه: $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \backsim N(0,1)$ وبالتالي يكون الاحتمال المطلوب: $P(\bar{X} > 1180) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{1180 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$ $= P\left(Z > \frac{1180 - 1200}{100/\sqrt{64}}\right) \quad = 0.9452$

- **توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{X}$ عند المعاينة من مجتمع غير طبيعي:** إذا كانت المتغيرات $X_1, X_2, \dots, X_n$ متتالية من المتغيرات العشوائية المستقلة المتطابقة التوزيع بمتوسط μ وتباينه σ^2 فإن توزيع المتغير العشوائي $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}$ يقترب من التوزيع الطبيعي كلما اقتربت قيمة n من ∞.

الحل:	**المثال:**
لدينا σ مجهول و $n \geq 30$ ومنه: $$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$ وبالتالي يكون الاحتمال المطلوب: $$P(\bar{X} > 8) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} > \frac{8-\mu}{s/\sqrt{n}}\right)$$ $$= P\left(Z > \frac{8-7}{3/\sqrt{36}}\right) = P(Z > 2)$$ $$= 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0.9772 = 0.0$$	إذا سحبت عينة عشوائية حجمها 36 وتباينها 9 من مجتمع متوسطه 7. ما هو احتمال أن يفوق الوسط الحسابي للعينة 8؟