Mathématique Statistique

Dr. HAFIRASSOU ZINEB

Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf - Mila

Institut des Sciences et de la Technologie

Département de SNV

Email : z.hafirassou@centre-univ-mila.dz

5.0

Février 2023

Table des matières

I - Chapitre 01 : Séries numériques 3

1. Séries à termes réels ... 4

1.1. La convergence d'une série numérique ... 4

1.2. Opérations algébriques sur les séries numériques ... 5

2. Séries à termes positifs ... 6

2.1. Théorèmes de comparaison ... 6

2.2. Règles usuelles de convergence ... 7

3. Test d'acquisitions ... 9

3.1. Exercice ... 9

3.2. Exercice ... 9

3.3. Exercice : ... 9

3.4. Exercice ... 9

3.5. Exercice : ... 9

Solutions des exercices 11

I Chapitre 01 : Séries numériques

1. Séries à termes réels

1.1. La convergence d'une série numérique

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On appelle série numérique de terme général u_n, toute expression de la forme: $u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n\geq 0} u_n$

où les nombres réels $u_0, u_1, \cdots, u_n, \cdots$ sont appelés termes de la série et u_n est appelé terme général de la série.

Considérons maintenant les sommes partielles suivantes

$$\begin{cases} S_0 = u_0 \\ S_1 = u_0 + u_1 \\ \vdots \\ S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \end{cases}$$

Le nombre S_n est appelé somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ et la suite $(S_n)_n$ est appelée suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Exemple

- $\sum_{n\geq 0} aq_n, \quad a \neq 0 \longrightarrow$ Série géométrique de raison q.
- $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \longrightarrow$ Série Harmonique.

Définition

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes réels. On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ converge et qu'elle diverge si la suite des sommes partielles diverge.

Exemple

Soit $\sum_{n\geq 1} u_n$ la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(n+1)}, \quad n \geq 1$

- Le terme u_n peut se réécrire sous la forme $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \quad n \geq 1.$
- La somme partielle de la série

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

$$= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$$

$= 1 - \dfrac{1}{n+1}$

- On a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{n+1} = 1.$

donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est convergente de somme $S = 1$.

1.2. Opérations algébriques sur les séries numériques

Fondamental

Soient $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ deux séries numériques, alors on a les propriétés suivantes

- Si $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est convergente de somme S_1 et si $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ est convergente de somme S_2, alors $\sum\limits_{n\geq 0} u_n + v_n$ est convergente de somme $S_1 + S_2$.
- Si $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est convergente de somme S_1 et si $a \in \mathbb{R}$ alors $\sum\limits_{n\geq 0} au_n$ est convergente de somme aS_1.
- Si $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est convergente et si $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ est divergente alors $\sum\limits_{n\geq 0} u_n + v_n$ est divergente.
- Si les deux séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ sont divergente, alors on ne peut rien conclure sur la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n + v_n$.

2. Séries à termes positifs

2.1. Théorèmes de comparaison

Définition

On appelle série à terme positif toute série dont le terme général $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 0$.

Fondamental

Soit $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ une série à termes réels positifs, alors cette série converge vers S si et seulement si la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ est majorée c-à-d

$S_n \leq S$ pour tout $n \geq 0$.

Fondamental

Soient $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs vérifiant

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{tel que pour tout } \; n \geq n_0, \;\; u_n \leq v_n$$

- Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ est convergente alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est convergente.
- Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est divergente alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ est divergente.

Complément

Soient $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs, s'il existe $a, b > 0$ vérifiant

$$au_n \leq v_n \leq bu_n$$

alors $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

Fondamental

Soient $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs, s'il existe un réel l (ou $l = +\infty$) tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$

- Si $l = 0$ et la série $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ est convergente alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est convergente.
- Si $l = +\infty$ et la série $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ est divergente alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est divergente.
- Si $l \neq 0$ et $l \neq +\infty$ alors les deux séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

2.2. Règles usuelles de convergence

Définition : Série de Riemann

On appelle série de Riemann toute série numérique dont le terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$.

Remarque

La série de Riemann est convergente pour tout $\alpha > 1$.

Fondamental : Règle de Riemann

La règle de Riemann revient à comparer une série à termes positifs à une série de Riemann.

Soit $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ une série à termes réels positifs et soit $\alpha \in \mathbb{R}$, supposons qu'il existe un réel positif l (ou $l = +\infty$) tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = l$

- Si $l = 0$ et $\alpha > 1$ alors la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est convergente.
- Si $l = +\infty$ et $\alpha \leq 1$ alors la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est divergente.
- Si $l \neq 0$ et $l \neq +\infty$ alors les deux séries $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ sont de même nature.

Fondamental : Règle de d'Alembert

Soit $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ une série à termes réels strictement positifs, supposons qu'il existe un réel positif l (ou $l = +\infty$) tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$

- Si $l < 1$ alors la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est convergente.
- Si $l > 1$ alors la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est divergente.

Fondamental : Règle de Cauchy

Soit $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ une série à termes réels strictement positifs, supposons qu'il existe un réel positif l (ou $l = +\infty$) tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = l$

- Si $l < 1$ alors la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est convergente.
- Si $l > 1$ alors la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est divergente.

3. Test d'acquisitions

3.1. Exercice

[*solution* n°1 p.11]

La série de Riemann $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\alpha}}$ est convergente pour tout $\alpha > 1$.

- O Vrai
- O Faux

3.2. Exercice

[*solution* n°2 p.11]

Parmi les propositions suivantes lesquelles sont exactes :

- ☐ La somme de deux séries convergentes est convergente
- ☐ Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente et si $\sum_{n\geq 0} v_n$ est divergente alors $\sum_{n\geq 0} u_n + v_n$ est divergente.
- ☐ La somme de deux séries divergentes est divergente

3.3. Exercice :

Etudier la nature des séries numériques de terme général u_n et calculer leur somme

- $u_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}, \quad n \geq 0.$
- $u_n = \ln(1+\dfrac{1}{n}), \quad n \geq 1.$
- $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad n \geq 1.$
- $u_n = \dfrac{n^2-1}{n-1}, \quad n > 1.$

3.4. Exercice

[*solution* n°3 p.11]

La somme de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}, \quad n \geq 1$ est :

3.5. Exercice :

Etudier la nature des séries numériques suivantes

- $\sum_{n\geq 1}\dfrac{a^n}{\sqrt{n}}, \quad a \geq 0.$
- $\sum_{n\geq 1}\dfrac{n}{2^n}.$
- $\sum_{n\geq 1}(a+\dfrac{1}{n})^n, \quad a > 0.$
- $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{\sqrt{n}(n+1)}.$

Exercice :

- $\sum_{n\geq 0} \frac{\cos^2(n)}{2^n}$.

Solutions des exercices

> **Solution** n°1

Exercice p. 9

La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente pour tout $\alpha > 1$.

- (•) Vrai
- ( ) Faux

> **Solution** n°2

Exercice p. 9

Parmi les propositions suivantes lesquelles sont exactes :

- [x] La somme de deux séries convergentes est convergente
- [x] Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente et si $\sum_{n\geq 0} v_n$ est divergente alors $\sum_{n\geq 0} u_n + v_n$ est divergente.
- [ ] La somme de deux séries divergentes est divergente

> **Solution** n°3

Exercice p. 9

La somme de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(n+1)}, \quad n \geq 1$ est :

1