العزوم والدالة المتجددة للعزوم
(Moment Generating Function)

بعد التعرف على المتغيرات العشوائية بنوعيها المتقطعة والمستمرة، سوف نحاول في هذه المحاضرة دراسة بعض المفاهيم الجديدة والتي تتمثل فيما يلي:

- العزوم لمتغير عشوائي
- دالة توليد العزوم لمتغير عشوائي
- متباينة تشيبتشف وقانون الأعداد الكبيرة

1. العزوم لمتغير عشوائي:

نميز هنا بين نوعين من العزوم: العزوم البسيطة والعزوم المركزية:

1.1. العزوم البسيطة(Initial Moments):

ليكن X متغيرا عشوائيا عرف قانون توزيعه.

العزم البسيط من الدرجة r حيث ($r\in\mathbb{N}$) للمتغير العشوائي X هو التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X^r، ويرمز إليه بالرمز:

$$\boxed{m_r = E(X^r)}$$

حالات خاصة:

$$m_0 = E(X^0) = E(1) = 1$$
$$m_1 = E(X^1) = E(X) = \mu$$

وعلى هذا الأساس يتم حسابه بالنسبة للمتغير العشوائي المتقطع والمستمر كما يلي:

العزم المرتبط بالأصل في حالة المتغير العشوائي المتقطع	العزم المرتبط بالأصل في حالة المتغير العشوائي المستمر
$m_r = E(X^r) = \sum_i x_i^{\,r} f(x)$	$m_r = E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)dx$

مثال 1:

- أحسب العزم من الدرجة 3.

$$P(X = x_i) = \begin{cases} 1/2; x = 1 \\ 1/3; x = 2 \\ 1/6; x = 3 \\ 0 \quad otherwise \end{cases}$$

الحل:

العزم البسيط من الدرجة 3

$$m_3 = E[(X)^3] = \sum x^3{}_i\, P(X = x_i)$$
$$m_3 = [1^3 \cdot \frac{1}{2}] + [2^3 \cdot \frac{1}{3}] + [3^3 \cdot \frac{1}{6}]$$
$$m_3 = \frac{1}{2} + \frac{8}{3} + \frac{27}{6} = \frac{3 + 16 + 27}{6} = \frac{46}{6}$$
$$m_3 = \frac{23}{3}$$

2.1. العزوم المركزية (Central Moments):

ليكن X متغيرا عشوائيا متوسطه الحسابي μ.

العزم المركزي من الدرجة r حيث ($r\in\mathbb{N}$) للمتغير العشوائي X هو التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المركزي $[X-\mu]^r$،

ويرمز إليه بالرمز: M_r. أي أن $\boxed{M_r = E[(X-\mu)^r];\ \ r = 1, 2, \ldots}$

كما درسنا سابقا المتغيرات العشوائية هي متغيرات عشوائية متقطعة ومتغيرات عشوائية مستمرة، وعلى هذا الأساس يحسب العزم المركزي حسب طبيعة المتغير العشوائي سواء متقطع او مستمر.

العزم المركزي في حالة المتغير العشوائي المتقطع	العزم المركزي في حالة المتغير العشوائي المستمر
$M_r = \sum_i (x_i-\mu)^r f(x)$	$M_r = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^r f(x)dx$

مثال 2: ليكن X متغير عشوائي له دالة كثافة احتمالية كما يلي:

- أحسب التوقع الرياضي؛
- أحسب العزم المركزي من الدرجة 3.

$$P(X=x_i)=\begin{cases}3/4; x=1\\ 1/4; x=2\\ 0 \quad otherwise\end{cases}$$

الحل:

التوقع الرياضي E(X)= µ

$$E(X) = \sum x_i p(X=x_i)$$
$$E(X) = (\frac{3}{4}\times 1) + (\frac{1}{4}\times 2)$$
$$E(X) = \mu = \frac{5}{4}$$

العزم المركزي من الدرجة 3

$$M_3 = E[(X-\mu)^3]$$
$$M_3 = \sum (X-\frac{5}{4})^3 \times P(X=x_i)$$
$$M_3 = [(1-\frac{5}{4})^3\cdot\frac{3}{4}] + [(2-\frac{5}{4})^3\cdot\frac{1}{4}]$$
$$M_3 = [(-\frac{1}{4})^3\cdot\frac{3}{4}] + [(\frac{3}{4})^3\cdot\frac{1}{4}]$$
$$M_3 = -\frac{3}{4^4}+\frac{27}{4^4} = \frac{24}{256} = \frac{3}{32}$$

3.1- العلاقة بين العزوم المركزية والعزوم البسيطة

نشير هنا إلى وجود علاقة وطيدة بين العزوم البسيطة والعزوم المركزية، يمكن كتابة العزم المركزي من الدرجة r بدلالة العزوم البسيطة على الشكل التالي:

$$M_r = E([X-E(X)]^r) = E\left[\sum_{j=0}^{r} C_r^j . X^j . \left(-E(X)\right)^{r-j}\right]; r\in\mathbb{N}$$

ومع العلم أن $E(X)$ ثابت فإن:

$$M_r = E([X-E(X)]^r) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j}\, C_r^j E\left(X^j\right)[E(X)]^{r-j}\ ;\quad r\in\mathbb{N}$$

$$\boxed{M_r = E([X-E(X)]^r) = \sum_{j=0}^{r}(-1)^{r-j}\, C_r^j m_j m_1^{r-j};\quad r\in\mathbb{N}\quad (*)}$$

حالات خاصة: $M_0 = 1$ ، $M_1 = 0$ ، $M_2 = m_2 - m_1^2 = \sigma^2$

مثال3: أحسب العزم المركزي من الدرجة الثالثة بدلالة العزوم البسيطة.

الجواب: من العلاقة $(*)$ يكون لدينا:

$$M_3 = E([X-E(X)]^3) = \sum_{j=0}^{3} (-1)^{3-j} C_3^j m_j m_1^{3-j}$$

وبالتالي: $M_3 = -C_3^0 m_0 m_1^3 + C_3^1 m_1 m_1^2 - C_3^2 m_2 m_1 + C_3^3 m_3 m_1^0$

إذن: $M_3 = -m_0 m_1^3 + 3m_1 m_1^2 - 3m_2 m_1 + m_3 m_1^0$

ومنه: $M_3 = -m_1^3 + 3m_1^3 - 3m_2 m_1 + m_3$

أي أن: $M_3 = m_3 - 3m_2 m_1 + 2m_1^3$

مثال4:

X متغير عشوائي دالة كثافة احتماله: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}; & x \in [0,1] \\ 0; & otherwise \end{cases}$

1- **أحسب العزم البسيط من الرتبة r ثم استنتج العزوم البسيطة الأربعة الأولى.**

2- **أوجد العزوم المركزية الأولى (r =0,1,2,3)**

الحل:

1- حساب العزم البسيط من الرتبة r.

$$m_r = E(X^r) = \int_0^1 x^r . \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^{r-\frac{1}{2}}\right) dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^{r+(1/2)}}{r+(1/2)}\right]_0^1 = \frac{1}{2r+1}$$

الاستنتاج: $m_0 = 1;$ ، $m_1 = 1/3$ ، $m_2 = 1/5$ ، $m_3 = 1/7$

2- إيجاد العزوم المركزية الأولى (r =0,1,2,3)

$M_0 = 1;$ ، $M_1 = 0$ ، $M_2 = \sigma^2 = m_2 - m_1^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{4}{45}$ ،

$$M_3 = m_3 - 3m_2 m_1 + 2m_1^3 = 1/7 - 3\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{4}{45}\right)^3 = -0.056$$

2. الدالة المولدة للعزوم (Moment Generating Function)

دالة توليد العزوم لمتغير عشوائي X، هي الدالة $t \to m_X(t)$ ذات المتغير الحقيقي t المعرفة بالعلاقة الرياضية التالية:

$$\boxed{\boldsymbol{m_X(t) = E[e^{tX}]}}$$

1.2. دالة توليد العزوم لمتغير عشوائي متقطع:

إذا كان Xمتغيرا عشوائيا متقطعا له دالة كثافة احتمالية P(x) فإنه يمكن حساب الدالة المولدة للعزوم كما يلي:

$$\boxed{m(t) = E[e^{tX}] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} . p(X=x)}$$

مثال1: إذا كان X متغيرا عشوائيا معرف بدالة الكثافة الاحتمالية: $p(X=x_i) = \begin{cases} 1/5\,; & x=0 \\ 3/5\,; & x=1 \\ 1/5\,; & x=2 \\ 0; & otherwise \end{cases}$

أوجد الدالة المولدة لعزوم المتغير العشوائي X.

الحل:

إيجاد الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي X

نعلم أن: $m(t) = E[e^{tX}] = \sum_{x=0}^{2} e^{tx} . p(X=x)$

ومنه: $m(t) = e^{0t}.(1/5) + e^{1t}.(3/5) + e^{2t}.(1/5)$

أي أن: $m(t)=\frac{1}{5}(e^{0t}+3e^{1t}+e^{2t}))=\frac{1}{5}(e^{2t}+3e^{t}+1)$

2.2. الدالة المولدة لعزوم متغير عشوائي مستمر:

إذا كان X متغيرا عشوائيا مستمرا له دالة كثافة احتمالية f(x) فإنه يمكن حساب الدالة المولدة للعزوم كما يلي:

$$\boxed{m(t)=E[e^{tX}]=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tX}f(x)dx}$$

مثال 2: X متغير عشوائي مستمر له دالة كثافة احتمالية f(x)،

أوجد الدالة المولدة للعزوم لهذا المتغير.	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x; 0<x<2\\ 0 \quad otherwise\end{cases}$

الحل:

$$m_x(t)=E[e^{tX}]=\int_0^2 e^{tx}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2 xe^{tx}dx$$

نلاحظ أن هذا التكامل هو تكامل بالتجزئة من الشكل:

$$\int_a^b UdV=[UV]_a^b-\int_a^b VdU=\frac{1}{2}\int_0^2 xe^{tX}dx$$

$$m_x(t)=\frac{1}{2}\left[\frac{xe^{tx}}{t}\right]_0^2-\int_0^2\frac{e^{tx}}{t}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{xe^{tx}}{t}\right]_0^2-\frac{1}{t}\int_0^2 e^{tx}dx$$

$$m_x(t)=\frac{1}{2}\left[\left[\frac{xe^{tx}}{t}\right]_0^2-\frac{1}{t}\left[\frac{e^{tx}}{t}\right]_0^2\right]$$

$$=\frac{e^{2t}}{t}-\frac{e^{2t}}{2t^2}+\frac{1}{t^2}$$

ملاحظة: عملية التكامل بالتجزئة تكون بالطريقة التالية:

$$\begin{cases}U=x\\ dV=e^{tx}\end{cases}\qquad\begin{cases}dU=1\\ V=\frac{e^{tx}}{t}\end{cases}$$

ويمكن استعمال طريقة المشتقات للحصول على نفس النتيجة، وهي أسهل للطالب.

3.2- اشتقاق العزوم من الدالة المولدة للعزوم

يمكن الحصول على العزوم البسيط m_r من الدرجة (r) انطلاقا من دالة توليد العزوم -إن وجدت- اعتمادا على العلاقة الرياضية التالية:

$$\boxed{\boldsymbol{m_r=E(X^r)=\frac{d^r m(t)}{dt^r}\Big|_{t=0}=m_X^{(r)}(0)}}$$

البرهان:

إذا كانت دالة توليد العزوم موجودة وقابلة للاشتقاق عدة مرات في جوار (0) فإن:

$$m_X(t)=1+\frac{t}{1!}m_X'(0)+\frac{t^2}{2!}m_X''(0)+\frac{t^3}{3!}m_X^{(3)}(0)+\cdots+\frac{t^r}{r!}m_X^{(r)}(0)+\cdots(*)$$

أيضا: $m_X(t)=E(e^{tX})=E\left(1+\frac{tx}{1!}+\frac{(tx)^2}{2!}+\frac{(tx)^3}{3!}+\cdots+\frac{(tx)^r}{r!}+\cdots\right)$

إذن: $m_X(t)=E(e^{tX})=1+\frac{t}{1!}E(X)+\frac{t^2}{2!}E(X^2)+\frac{t^3}{3!}E(X^3)+\cdots+\frac{t^r}{r!}E(X^r)+\cdots(**)$

وبالمطابقة بين العلاقتين $(*)$ و $(**)$ نجد أن: $\boldsymbol{m_r=E(X^r)=m_X^{(r)}(0)}$

مثال1: استخدم الدالة المولدة للعزوم التالية: $m(t) = \frac{1}{5}(e^{2t} + 3e^{t} + 1)$ لحساب التوقع الرياضي والتباين للمتغير العشوائي X.

الحل:

1- حساب التوقع الرياضي:1= $E(X) = m'(t)_{t=0} = \frac{1}{5}[2e^{2t} + 3e^{t}]_{t=0} = \frac{1}{5}(5) = 1$

2- حساب التباين: $E(X^2) = m''(t)_{t=0} = \frac{1}{5}[4e^{2t} + 3e^{t}]_{t=0} = \frac{7}{5}$

ومنه: $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{7}{5} - (1)^2 = \frac{2}{5}$

مثال2: X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية هي: $f(x) = \begin{cases} 1; & x \in [0,1] \\ 0; & sinon \end{cases}$.

1- أوجد دالة توليد العزوم للمتغير العشوائي X.

2- أحسب العزم الابتدائي $E(X^k)$ بطريقتين مختلفتين.

3- أحسب العزوم المركزية الأربعة الأولىM_k: $k = 0,1,2,3$.

الحل:

1- إيجاد دالة توليد العزوم، ثم استنتاج العزم الابتدائي $E(X^k)$

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_0^1 1.e^{tx}dx = \frac{1}{t}[e^{tx}]_0^1 = \frac{1}{t}(e^t - 1)$$

- طريقة (1) لحساب العزم الابتدائي من الرتبة k

$$M_X(t) = \frac{1}{t}\left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} + \cdots - 1\right)$$

$$M_X(t) = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{1!}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{t^2}{2!}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{t^3}{3!}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{t^4}{4!}\right) + \cdots + \frac{1}{(k+1)}\left(\frac{t^k}{k!}\right) + \cdots$$

وبالتالي: $M_X^{(k)}(0) = \frac{1}{k+1}$

- طريقة (2) حساب العزم الابتدائي $E(X^k)$ من الرتبة k.

$$m_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k.f(x)dx = \int_0^1 x^k dx = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{k+1}$$

2- حساب العزوم المركزية الأربعة الأولى M_n، $n = 0,1,2,3$.

نعلم من العلاقة بين العزوم البسيطة والعزوم المركزية أن:

$M_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3 = 0$	$M_2 = \sigma^2 = m_2 - m_1^2 = 1/12$	$M_1 = 0$	$M_0 = 1$

4.2-الدوال المولدة للعزوم لبعض التوزيعات:

أولا- الدالة المولدة للعزوم لتوزيع برنولي هي: $m(t) = q + p \cdot e^t$. ومنه: $E(X) = V(X) = p$

الدالة المولدة للعزوم	بما أن X متغير عشوائي ذو توزيع برنولي فإن:
$m(t) = E[e^{tX}] = \sum e^{tX}P(X = x_i)$ $m(t) = e^{tX}p(X = 0) + e^{tX}p(X = 1)$ $m(t) = e^{t\cdot 0}q + e^{t\cdot 1}p$ $m(t) = q + p \cdot e^t$ ومنه: $E(X) = V(X) = p$	$X \sim B(1,P) \Rightarrow X = \{0,1\}$ $P(X = x_i) = \begin{cases} p; x = 1 \\ q; x = 0 \\ 0 \quad otherwise \end{cases}$ p+q=1:

ثانيا- الدالة المولدة للعزوم لتوزيع ثنائي الحد هي: $m(t) = (q + p \cdot e^t)^n$. ومنه: $E(X) = np, V(X) = npq$

بما أن X متغير عشوائي ثنائي الحدين فإن:	الدالة المولدة للعزوم
$x \to B(n,p) \Longrightarrow X = \{0,1,\dots,n\}$ $p(X=x) = C_x^n . p^x . q^{n-x}$ $p+q=1$	$m(t) = E[e^{tX}] = \sum_{x=0}^{n} e^{tx}. C_n^x p^x q^{n-x}$ $m(t) = \sum_{x=0}^{n} C_n^x . (pe^t)^x . q^{n-x} = (q+pe^t)^n$ ومنه: $E(X) = np,\ \ V(X) = npq$

ثالثا- الدالة المولدة للعزوم لتوزيع بواسون هي: $m(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$. ومنه: $E(X) = \lambda, V(X) = \lambda^2$

$x \to poisson(\lambda) \Longrightarrow X = \{0,1,\dots\}$ $p(X=x) = e^{-\lambda}. \frac{\lambda^x}{x!}$	$X \sim Poisson(\lambda)$ $m(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ $m(t) = E(e^{tx}) = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{tx}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^t\lambda)^x}{x!}$ $m(t) = e^{-\lambda} e^{e^t\lambda} \Longrightarrow m(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$ $E(X) = \lambda, \quad V(X) = \lambda^2$