Centre universitaire Abdelhafid Boussouf, Mila
Institut des Sciences et Technologies
Département de Génie Mécanique
Transfert de chaleur II
Pr. S. Saouli

Examen final

Transfert de chaleur II

Durée : 1h 30 mn

Questions de cours (4 points)

Ecrire le nombre de Reynolds Re_R pour l'écoulement d'un fluide newtonien de débit massique $\dot{m}$ dans un tube circulaire de rayon R.

Exercice n°1 (8 points)

L'équation de continuité et l'équation de la quantité du mouvement pour la couche limite visqueuse sur une plaque plane sont

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$$

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}$$

En introduisant les grandeurs suivantes

$$\overline{V}_x = \frac{\rho L}{\mu} V_x,\ \overline{V}_y = \frac{\rho L}{\mu} V_y,\ \overline{x} = \frac{x}{L},\ \overline{y} = \frac{y}{L},\ \overline{P} = \frac{P}{\rho\left(\frac{\nu}{L}\right)^2}$$

a) Trouver les formes adimensionnelles de l'équation de continuité et de l'équation de la quantité du mouvement.

b) Si le coefficient de frottement pariétal Cf_P est défini par $Cf_P = \dfrac{\tau_P}{\rho\left(\frac{\nu}{L}\right)^2}$, trouver son expression.

Exercice n°2 (8 points)

Le pouvoir émissif spectral d'un corps noir en fonction de la fréquence ν et de la température absolue T est donné par la formule de Planck

$$E_b(\nu, T) = A\frac{\nu^3}{e^{B\frac{\nu}{T}} - 1}$$

où A et B sont des constantes.

a) Sachant que la fonction $E_b(\nu,T)$ admet un maximum, monter que la fréquence au quelle correspond ce maximum vérifie l'équation

$$\frac{e^{B\frac{\nu}{T}}-1}{e^{B\frac{\nu}{T}}}=\frac{B}{3}\frac{\nu}{T}$$

b) Si, la solution de cette équation est notée α, trouver une relation entre la fréquence $\nu_{\max}$ et la température T.

Corrigé type de l'examen final

Transfert de chaleur II

Durée : 1h 30 mn

Questions de cours (4 points)

Le nombre de Reynolds dans un tube circulaire de rayon R est

$$\mathrm{Re}_R = \frac{\rho \overline{U} D}{\mu} = \frac{2\rho \overline{U} R}{\mu} \quad \boxed{1.0}$$

le débit massique $\dot{m}$ est lié à la vitesse moyenne par la relation

$$\dot{m} = \rho \overline{U} S = \rho \overline{U} \pi R^2 \quad \boxed{1.0}$$

en éliminant la vitesse moyenne entre ces deux relations, nous obtenons

$$\mathrm{Re}_R = \frac{2\rho R}{\mu}\frac{\dot{m}}{\rho \pi R^2} = \frac{2\dot{m}}{\mu \pi R} \quad \boxed{2.0}$$

Exercice n°1 (8 points)

a) Formes adimensionnelle de 'équation de continuité et de l'équation de la quantité du mouvement.

A partir des grandeurs $\overline{V}_x = \frac{\rho L}{\mu} V_x$, $\overline{V}_y = \frac{\rho L}{\mu} V_y$, $\overline{x} = \frac{x}{L}$, $\overline{y} = \frac{y}{L}$, $\overline{P} = \frac{P}{\rho\left(\frac{\nu}{L}\right)^2}$, nous avons

$$V_x = \frac{\mu}{\rho L}\overline{V}_x,\ V_y = \frac{\mu}{\rho L}\overline{V}_y,\ x = L\overline{x},\ y = L\overline{y},\ P = \rho\left(\frac{\nu}{L}\right)^2 \overline{P} \quad \boxed{2.5}$$

en substituant ces termes dans l'équation de continuité et l'équation de la quantité du mouvement, nous obtenons

$$\frac{\partial\left(\frac{\mu}{\rho L}\overline{V}_x\right)}{\partial(L\overline{x})} + \frac{\partial\left(\frac{\mu}{\rho L}\overline{V}_y\right)}{\partial(L\overline{y})} = 0 \quad \boxed{0.5}$$

$$\frac{\mu}{\rho L}\overline{V}_x \frac{\partial\left(\frac{\mu}{\rho L}\overline{V}_x\right)}{\partial(L\overline{x})} + \frac{\mu}{\rho L}\overline{V}_y \frac{\partial\left(\frac{\mu}{\rho L}\overline{V}_x\right)}{\partial(L\overline{y})} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho\left(\frac{\nu}{L}\right)^2\overline{P}\right)}{\partial(L\overline{x})} + \nu\frac{\partial^2\left(\frac{\mu}{\rho L}\overline{V}_x\right)}{\partial(L\overline{y})^2} \quad \boxed{0.5}$$

soient

$$\frac{\mu}{\rho L^2}\frac{\partial \overline{V}_x}{\partial \overline{x}}+\frac{\mu}{\rho L^2}\frac{\partial \overline{V}_y}{\partial \overline{y}}=0 \quad \boxed{0.5}$$

$$\frac{\mu^2}{\rho^2 L^3}\overline{V}_x\frac{\partial \overline{V}_x}{\partial \overline{x}}+\frac{\mu^2}{\rho^2 L^3}\overline{V}_y\frac{\partial \overline{V}_x}{\partial \overline{y}}=-\frac{\mu^2}{\rho^2 L^3}\frac{\partial \overline{P}}{\partial \overline{x}}+\frac{\mu^2}{\rho^2 L^3}\frac{\partial^2 \overline{V}_x}{\partial \overline{y}^2} \quad \boxed{0.5}$$

En multipliant la première équation par $\frac{\rho L^2}{\mu}$ et la seconde équation par $\frac{\rho^2 L^3}{\mu^2}$, nous obtenons

$$\frac{\partial \overline{V}_x}{\partial \overline{x}}+\frac{\partial \overline{V}_y}{\partial \overline{y}}=0 \quad \boxed{1.0}$$

$$\overline{V}_x\frac{\partial \overline{V}_x}{\partial \overline{x}}+\overline{V}_y\frac{\partial \overline{V}_x}{\partial \overline{y}}=-\frac{\partial \overline{P}}{\partial \overline{x}}+\frac{\partial^2 \overline{V}_x}{\partial \overline{y}^2} \quad \boxed{1.0}$$

b) Le coefficient de frottement pariétal est $Cf_P=\frac{\tau_P}{\rho\left(\frac{\nu}{L}\right)^2}$, calculons tout d'abord la contrainte de cisaillement pariétale τ_P, soit

$$\tau_P=\mu\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)_{y=0}=\mu\left[\frac{\partial\left(\frac{\mu}{\rho L}\overline{V}_x\right)}{\partial(L\overline{y})}\right]_{\overline{y}=0}=\frac{\mu^2}{\rho L^2}\left(\frac{\partial \overline{V}_x}{\partial \overline{y}}\right)_{\overline{y}=0} \quad \boxed{1.0}$$

en substituant cette expression dans la relation du coefficient de frottement pariétal, nous obtenons

$$Cf_P=\frac{\frac{\mu^2}{\rho L^2}\left(\frac{\partial \overline{V}_x}{\partial \overline{y}}\right)_{\overline{y}=0}}{\rho\left(\frac{\nu}{L}\right)^2}=\left(\frac{\partial \overline{V}_x}{\partial \overline{y}}\right)_{\overline{y}=0} \quad \boxed{0.5}$$

<u>Exercice n°2</u> (8 points)

a) La dérivée du pouvoir émissif spectral $E_b(\nu,T)$ par rapport à la fréquence est

$$\frac{dE_b(\nu,T)}{d\nu}=\frac{d}{d\nu}\left(A\frac{\nu^3}{e^{B\frac{\nu}{T}}-1}\right)=\frac{3A\nu^2\left(e^{B\frac{\nu}{T}}-1\right)-A\nu^3\left(\frac{B}{T}\right)e^{B\frac{\nu}{T}}}{\left(e^{B\frac{\nu}{T}}-1\right)^2}\qquad \boxed{3.0}$$

Comme la fonction $E_b(\nu,T)$ admet un maximum, nous devons avoir $\frac{dE_b(\nu,T)}{d\nu}=0$, d'où la relation $\boxed{1.0}$

$$3A\nu^2\left(e^{B\frac{\nu}{T}}-1\right)-A\nu^3\left(\frac{B}{T}\right)e^{B\frac{\nu}{T}}=0\qquad \boxed{1.0}$$

en réarrangeant les termes, nous obtenons

$$3\left(e^{B\frac{\nu}{T}}-1\right)-B\frac{\nu}{T}e^{B\frac{\nu}{T}}=0$$

soit

$$\frac{e^{B\frac{\nu}{T}}-1}{e^{B\frac{\nu}{T}}}=\frac{1}{3}B\frac{\nu}{T}\qquad \boxed{1.0}$$

b) Si nous admettons que la solution de cette équation non linéaire est α, nous pouvons écrire alors que

$$B\frac{\nu_{\max}}{T}=\alpha\qquad \boxed{1.0}$$

et par conséquent

$$\nu_{\max}=\frac{\alpha}{B}T\qquad \boxed{1.0}$$