Centre universitaire Abd Elhafid Boussouf - Mila

nstitut des sciences et de la technologie

Département de Génie Mécanique et Electromécanique

le 14/05/2023

ième Année GM+EM+GP

Corrigée type de l'examen final de Méthodes numériques

Exercice 1 (6 pts)

- Tous les points du tableau sont distincts, donc il existe un seul polynôme d'interpolation. 0,5
- Le polynôme est d'ordre 3 puisqu'il existe 4 points. 0,5

$$p_i(x) = L_i(x) \times f(x_1), i = 1:4 \quad 0{,}5$$

$$p_3^0(x) = \frac{(x-2)}{(1-2)} \times \frac{(x-3)}{(1-3)} \times \frac{(x-5)}{(1-5)} \times 2 \quad 0{,}5$$

$$= -\frac{1}{4}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{31}{4}x + \frac{15}{2} \quad 0{,}5$$

$$p_3^1(x) = \frac{(x-1)}{(2-1)} \times \frac{(x-3)}{(2-3)} \times \frac{(x-5)}{(2-5)} \times 0 = 0 \quad 0{,}5$$

$$p_3^2(x) = \frac{(x-1)}{(3-2)} \times \frac{(x-2)}{(3-0)} \times \frac{(x-5)}{(3-5)} \times 3 \quad 0{,}5$$

$$= -\frac{3}{4}x^3 + 6x^2 - \frac{51}{4}x + \frac{15}{2} \quad 0{,}5$$

$$p_3^3(x) = \frac{(x-1)}{(5-1)} \times \frac{(x-2)}{(5-2)} \times \frac{(x-3)}{(5-3)} \times 6 \quad 0{,}5$$

$$= \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{4}x - \frac{3}{2} \quad 0{,}5$$

$$\boldsymbol{P_3(x) = -\frac{3}{4}x^3 + 7x^2 - \frac{71}{4}x + \frac{27}{2}} \quad 0{,}5$$

P(4)=13/2. 0,5

Exercice 2 (8 pts)

L'équation différentielle est donnée par :

$$\frac{dy}{(y+1)} = t^2 dt \text{ , (t=0, y=1)}$$

$$\frac{dy}{dt} = t^2(y+1) = f(t,y) \quad 0{,}25$$

h=0.5

1- Euler 0,25 $\begin{cases} k = f(t_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + hk \end{cases}$ 0,25 $\rightarrow \begin{cases} k = 0^2 \times (1+1) = 0 & 0{,}25 \\ y(0.5) = 1 + 0.5 \times 0 = 1 & 0{,}25 \end{cases}$

$$\begin{cases} k = 0.5^2 \times (1+1) = 0.5000 & 0{,}25 \\ y(1) = 1 + 0.5 \times 0.5 = 1.2500 & 0{,}25 \end{cases}$$

2- Euler modifiée (point milieu)

Centre universitaire Abd Elhafid Boussouf - Mila

nstitut des sciences et de la technologie

Département de Génie Mécanique et Electromécanique

ème Année GM+EM+GP

le 14/05/2023

Corrigée type de l'examen final de Méthodes numériques

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, y_n) & 0{,}25 \\ k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1) & 0{,}25 \\ y_{n+1} = y_n + h k_2 & 0{,}25 \end{cases} \qquad \begin{cases} k_1 = 0^2(1+1) = 0 & 0{,}25 \\ k_2 = 0.25^2(1 + 0.25 \times 0 + 1) = 0.1250 & 0{,}25 \\ y(0.5) = 1 + 0.5 \times 0.1250 = 1.0625 & 0{,}25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = 0.75^2\,(1.0625 + 1) = 0.5156 & 0{,}25 \\ k_2 = 0.75^2(1.0625 + 0.25 \times 0.5156 + 1) = 1.2327 & 0{,}25 \\ y(1) = 1.0625 + 0.5 \times 1.2327 = 1.6788 & 0{,}25 \end{cases}$$

3- La méthode de Runge-Kutta 4.

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, y_n) & 0{,}25 \\ k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1) & 0{,}25 \\ k_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1) & 0{,}25 \\ k_4 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1) & 0{,}25 \\ y_{n+1} = \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) & 0{,}5 \end{cases} \qquad \begin{cases} k_1 = 0.0000 & 0{,}25 \\ k_2 = 0.1250 & 0{,}25 \\ k_3 = 0.1289 & 0{,}25 \\ k_4 = 0.5322 & 0{,}25 \\ y(0.5) = 1.0867 & 0{,}25 \end{cases} \qquad \begin{cases} k_1 = 0.5217 & 0{,}25 \\ k_2 = 1.3205 & 0{,}25 \\ k_3 = 1.5451 & 0{,}25 \\ k_4 = 3.6318 & 0{,}25 \\ y(1) = 1.9104 & 0{,}25 \end{cases}$$

Exercice 3 (6 pts)

Méthode de Gauss :

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

On ne peut pas résoudre ce système avec cet arrangement puisque le pivot doit être non nul. 0,5

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \quad 0{,}5$$

0,5

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{4} & -\frac{21}{4} \end{vmatrix} \rightarrow x = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad 0{,}5 \quad 0{,}5 \quad 0{,}5$$

0,5 0,5

Pour résoudre le système par la méthode de Cholesky, il faut que la matrice A soit symétrique définie positive. 1

$$A^t = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \neq A$$ 1, le système ne peut être résolu avec la méthode de Cholesky.