Centre universitaire Abdelhafid Boussouf - Mila | 2022 – 2023
Institut des Sciences et de la Technologie | MI/Informatique
Département des Mathématiques et informatique | $1h30$

# Examen : Algèbre linéaire

**N.B :** La documentation n'est pas autorisée.

**Exercice 1.** *Résoudre le système linaires suivant (par la méthode de Gauss), où m est un paramètre réel donné.*

$$(S)\quad \begin{cases} x+y-(2+m)z & = & 1 \\ -2x-(3+m)y+3z & = & 1 \\ (1-m)x+2y-z & = & 1 \end{cases}$$

**Exercice 2.** 1. *Soient F et E les sous-espaces suivants de $\mathbb{R}^4$ :*

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : y+z+t=0\},$$

$$E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y=0,\ z=2t\},$$

*- Trouver la dimension et la base de $F \cap E$.*

2. *Soit F l'espace vectoriel des matrices carrées n sur $\mathbb{R}$. Soit $M \in F$ et $f$ une application définie par, . Soit*

$$\begin{array}{rccc} f: & F & \longrightarrow & F \\ & A & \longmapsto & AM+MA \end{array}$$

*- Montrer que $f$ est linéaire.*

**Exercice 3.** *Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une application définie par,*

$$f(x,y,z) = (x+2y-z, y+z, x+y-2z)$$

1. *Déterminer* $\ker(f)$ *et son dimension. $f$ est elle injective ? est elle surjective ?*

2. *Déterminer $Im(f)$ et sa base.*

3. *Montrer que* $\ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3$.

**Corrigé type**

**Solution d'Exercice 1 :** La première matrice augmentée est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2-m & | & 1 \\ -2 & -3-m & 3 & | & 1 \\ 1-m & 2 & -1 & | & 1 \end{pmatrix}; \quad [1pts]$$

on effectue $L_2 \longleftrightarrow 2L_1 + L_2$ et $L_3 \longleftrightarrow (1-m)L_1 - L_3$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2-m & | & 1 \\ 0 & -1-m & -1-2m & | & 3 \\ 0 & -1-m & m^2+m-1 & | & -m \end{pmatrix}; \quad [1pts]$$

on effectue $L_3 \longleftrightarrow L_3 - L_2$ , on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2-m & | & 1 \\ 0 & -1-m & -1-2m & | & 3 \\ 0 & 0 & m^2+3m & | & -m-3 \end{pmatrix}; \quad [1pts]$$

Alors, la solution est

$$z = \frac{-1}{m}, \ y = \frac{1-m}{m(m+1)} \ \text{ et } \ x = \frac{-m-3}{m(m+1)} \ \text{ si } \ m \neq 0, \ m \neq -1, \ m \neq -3. \ \ [1pts]$$

Si $m = 0$ et $m = -1$ le système n'a pas de solution. $[1pts]$
Si $m = -3$ le système devient

$$\begin{cases} 0z = 0 \\ 2y + 5z = 3 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Donc, la solution est $(x, y, z) = (\frac{-1+3z}{2}, \frac{3-5z}{2}, z)$. $[1pts]$

**Solution d'Exercice 2 :**
1. $F \cap E$ est le sous espace vectoriel qui satisfait les trois conditions :

$$z = 2t, \ \ x + y = 0, \ \ y + z + t = 0, \quad [1pts]$$

alors,

$$z = 2t, \ \ y = -3t, \ \ x = 3t, \quad [0.5pts]$$

Donc,

$$F \cap E = \{t(3, -3, 2, 1), \ \ t \in \mathbb{R}\}. \quad [0.5pts]$$

La dimension est $\dim(F \cap E) = 1$. $[1pts]$

2. Quels que soient $A, B \in F$ et quel que soit $k \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(A+\alpha B) &= (A+\alpha B)M + M(A+\alpha B) \quad [1pts] \\ &= AM + \alpha BM + MA + \alpha MB \quad [0.5pts] \\ &= (AM+MA) + \alpha(BM+MB) \quad [0.5pts] \\ &= f(A) + \alpha f(B) \quad [1pts] \end{aligned}$$

Donc $f$ est linéaire.

**Solution d'Exercice** 3 **:**

1.

$$\ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (0,0,0)\}, \quad [1pts]$$

le système à résoudre est

$$\begin{cases} a + 2y - z = 0 \\ y + z = 0 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -3z \\ y = -z \end{cases} \quad [1.5pts]$$

Donc, $\ker(f) = \{(3z, -z, z), \ z \in \mathbb{R}\} =< (3, -1, 1) > \quad [0.5pts]$ On a $\dim \ker(f) = 1$, Alors $f$ n'est pas injective $\quad [0.5pts]$. D'après théorème du rang

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker(f) + \dim Im(f) \Longrightarrow \dim Im(f) = 3 - 1 = 2 \neq 3$$

Alors $f$ n'est pas surjective $\quad [0.5pts]$.

2.

$$\begin{aligned} Im(f) &= \{y \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = y\}, \\ &= \{x(1,0,1) + y(2,1,1) + z(-1,1,-2), \ z \in \mathbb{R}\}, \\ &= < (1,0,1), (2,1,1), (-1,1,-2) > \quad [1pts] \end{aligned}$$

On voit bien que $-3(1,0,1) + (2,1,1) = (-1,1,-2)$ et comme $(1,0,1)$, $(-1,1,-2)$ sont linéairement indépendant, alors la base de $Im(f)$ est $\{(1,0,1), (-1,1,-2)\}$. $\quad [1pts]$

3.Remarquons que $\dim \ker(f) + \dim Im(f) = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \quad [0.5pts]$, et comme

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

alors, les vecteurs $\{(3,1,-1),(2,1,1),(-1,1,-2)\}$ sont linéairement indépendants $[1pts]$.
Donc, $\ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^3$. $[0.5pts]$