Centre Universitaire de Mila — Année universitaire 2022/2023

Institut des Sciences et de la Technologie — Semestre II

Domaine: LMD-Math (1[er] année) — Durée 1 h 30

Analyse II — 16/05/2023

Examen

Note: *Aucun document n'est autorisé.*

Exercice 1: (7 pts)

1) Calculer les primitives suivantes: 1,5 2,5

$$I_1 = \int \arctan x dx, \qquad I_2 = \int \frac{1}{2+\cos x+\sin x} dx.$$

2) On considère l'intégrale définie $I_n = \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \, dx, \quad n \in \mathbb{N}^*$.

a) À l'aide d'une intégration par parties trouver une relation entre I_n et I_{n-1}. 2

b) En déduire la valeur de I_4. 1

Exercice 2: (6 pts)

1) Montrer que: $\left(x + \frac{1}{x}\right) \arctan x > 1, \quad \forall x > 0.$ 2

2) Calculer les développements limités jusqu'à l'ordre n au voisinage de x_0 des fonctions suivantes:

$$f(x) = \exp(\sin x); \quad x_0 = 0, \quad n = 3.$$ 2

$$g(x) = \frac{x}{\cos x}; \quad x_0 = 0, \quad n = 5.$$ 2

Exercice 3: (7 pts)

1) Résoudre l'équation différentielle du premier ordre suivante:

$$y' - 2xy = (1-2x)e^x, \qquad y(0) = 3.$$ 3

2) On considère l'équation différentielle suivante:

$$y'' - 4y' + 4y = g(x) \qquad (E1)$$

où g est une fonction qui sera précisée plus loin.

a- Résoudre l'équation différentielle homogène associée à $(E1)$. 1,5

b- Trouver une solution particulière de $(E1)$ lorsque $g(x) = e^{-2x}$ et lorsque $g(x) = e^{2x}$ respectivement. 1

1,5

Bon courage.

Centre Universitaire de Mila
Institut des sciences et de la Technologie
Analyse II Domaine : LMD - Math

Corrigé de l'examen

Exercice 01 :

1) Calculer les primitives :

* $I_1 = \int \arctan x \, dx$ (I.p.p)

posons : $\begin{cases} u = \arctan x \\ v' = 1 \end{cases}$ 0,5 $\Rightarrow \begin{cases} u' = \frac{1}{1+x^2} \\ v = x \end{cases}$, donc

$$I_1 = \int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$
0,5
$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx$$
$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c \quad 0,5$$

* $I_2 = \int \frac{1}{2+\cos x + \sin x} dx$ (ch. V) ; on pose : $t = tg\frac{x}{2}$ 0,5

$\Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, alors

$$I_2 = \int \frac{1}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{\cancel{1+t^2}}{t^2+2t+3} \cdot \frac{2dt}{\cancel{1+t^2}}$$
0,5
$$= \int \frac{2}{t^2+2t+3} dt = 2 \int \frac{1}{(t+1)^2+2} dt = \int \frac{1}{\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dt$$

On pose $y = \frac{t+1}{\sqrt{2}}$ 0,5 $\Rightarrow dy = \frac{1}{\sqrt{2}} dt \Rightarrow dt = \sqrt{2} dy$. Donc

$$I_2 = \sqrt{2} \int \frac{1}{y^2+1} dy = \sqrt{2} \, \mathrm{Arctan}\, y + c \quad 0,5$$
$$= \sqrt{2} \arctan\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right) + c = \sqrt{2} \arctan\left(\frac{tg\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\sqrt{2}}\right) + c. \quad 0,5$$

2) $I_n = \int_0^1 (x^2-1)^n dx$, $n \in \mathbb{N}^*$

a) la relation entre I_n et I_{n-1} : (I.p.p)

$\begin{cases} u(x) = (x^2-1)^n \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ 0,5 $\Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 2nx(x^2-1)^{n-1} \\ v(x) = x \end{cases}$, Donc

$$I_n = \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n dx = x(x^2-1)^n \Big]_{-1}^{1} - 2n\int_{-1}^{1} x^2(x^2-1)^{n-1} dx$$

$$= -2n \int_{-1}^{1} (x^2-1+1)(x^2-1)^{n-1} dx \quad 0,5$$

$$= -2n \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n dx - 2n\int_{-1}^{1} (x^2-1)^{n-1} dx \quad 0,5$$

$$= -2n I_n - 2n I_{n-1}. \text{ Alors}$$

$$(1+2n) I_n = -2n I_{n-1} \Rightarrow I_n = \frac{-2n}{2n+1} I_{n-1} \quad 0,5$$

b) Valeur I_4 :

$$I_4 = -\frac{8}{9} I_3 = \left(-\frac{8}{9}\right)\times\left(-\frac{6}{7}\right) I_2 = \left(-\frac{8}{9}\right)\left(-\frac{6}{7}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) I_1$$

$$= \left(-\frac{8}{9}\right)\left(-\frac{6}{7}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) I_0 \quad 0,5 \quad = \frac{8\times 6\times 4\times 2}{9\times 7\times 5\times 3}\int_{-1}^{1} (x^2-1)^0 dx$$

$$= \frac{384}{945} \cdot x\Big]_{-1}^{1} = \frac{384}{945}\times 2 = \frac{768}{945} = \frac{256}{315} \quad 0,5$$

<u>Exercice 02:</u>

1) Montrer que : $\left(x+\frac{1}{x}\right)\arctan x > 1, \ \forall x>0$.

On a : $\left(x+\frac{1}{x}\right)\arctan x > 1 \Rightarrow \frac{x^2+1}{x}\arctan x > 1$

$\Rightarrow (x^2+1)\arctan x > x \Rightarrow (x^2+1)\arctan x - x > 0$.

On suppose que : $f(x) = (x^2+1)\arctan x - x \ ; \ \forall x>0$ 0,5

$\Rightarrow f'(x) = 2x\arctan x + \frac{x^2+1}{x^2+1} - 1 = 2x\arctan x$ 0,5

On a : $\forall x>0, \ 2x\arctan x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$

f est croissante 0,5 $\Rightarrow \forall x>0 ; f(x) > f(0) = 0$ 0,5

$\Rightarrow (x^2+1)\arctan x - x > 0, \ \forall x>0$

$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)\arctan x > 1, \ \forall x>0$.

2) * $f(x) = \exp(\sin x)$, $x_0 = 0$; $n=3$.

On a : $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ 0,5

On pose : $z = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ (si $x \to 0 \Rightarrow z \to 0$)

$$e^{\sin x} = e^{x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} = e^{z} = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + o(z^3)$$ 0,5

$$= 1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{6}x^3\right) + o(x^3)$$ 0,5

$$= 1 + x - \cancel{\frac{1}{6}x^3} + \frac{1}{2}x^2 + \cancel{\frac{1}{6}x^3} + o(x^3).$$ Donc

$$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3).$$ 0,5

$*$ $g(x) = \dfrac{x}{\cos x}$; $x_0 = 0$, $n = 3$

On a : $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)$ 0,5

0,5

$$\begin{array}{l|l} x & 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5) \\ \hline - \quad x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 & x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{24}x^5 \\ \hline \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{24}x^5 & \\ - \quad \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^5 & \\ \hline \frac{5}{24}x^5 & \end{array}$$

0,5

Alors : $g(x) = x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{24}x^5 + o(x^5)$ 0,5

Exercice 3 :

1) Résoudre l'équation différentielle :

$$y' - 2xy = (1 - 2x)e^x \quad \text{------} \quad (1)$$

$*$ Solution homogène (y_H) :

$y' - 2xy = 0 \Rightarrow y' = 2xy \Rightarrow \frac{y'}{y} = 2x$ 0,5

$\Rightarrow \frac{1}{y}\,dy = 2x\,dx \Rightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = \int 2x\,dx$

$\Rightarrow \ln|y| = x^2 + c \Rightarrow |y| = e^c \cdot e^{x^2}$

$\Rightarrow y = K e^{x^2}$ 0,5 , $K = \pm e^c$

$*$ Solution particulière (y_p) :

$y_p = K(x) e^{x^2}$ 0,5 $\Rightarrow y'_p = K'(x)e^{x^2} + 2x K(x) e^{x^2}$

Remplaçons y et y' dans (1), on obtient :

$k'(x)e^{x^2} + \cancel{2x k(x) e^{x^2}} - \cancel{2x k(x) e^{x^2}} = (1-2x)e^{x} \Rightarrow$

$k'(x)e^{x^2} = (1-2x)e^{x} \Rightarrow k'(x) = (1-2x)e^{x-x^2} \Rightarrow$

$k(x) = \int (1-2x)e^{x-x^2}\,dx = e^{x-x^2}$. Donc

$y_p = e^{x-x^2} \cdot e^{x^2} = e^{x}$ 0,5

* la solution générale est :

$y = y_H + y_p = k e^{x^2} + e^{x}$ 0,5

- pour $y(0) = 3$: On a.

$k e^{0} + e^{0} = 3 \Rightarrow k + 1 = 3 \Rightarrow k = 2$, alors la solution de (1) pour $y(0) = 3$ est : $y = 2e^{x^2} + e^{x}$. 0,5

2) $y'' - 4y' + 4y = g(x)$ ---- (E1)

a) Résoudre l'équation différentielle homogène associée :

$y'' - 4y' + 4y = 0$ ---- (E.H)

posons : $y = e^{rx}$ 0,5 $\Rightarrow y' = re^{rx}$ et $y'' = r^2 e^{rx}$, donc

$(r^2 - 4r + 4)e^{rx} = 0 \Rightarrow r^2 - 4r + 4 = 0$ 0,5 $\Rightarrow (r-2)^2 = 0$

$\Rightarrow r_0 = 2$. Alors : $y_H = (c_1 x + c_2)e^{2x}$; $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ 0,5

b) * la solution particulière pour $g(x) = e^{-2x}$:

On peut chercher une solution particulière de la forme :

$y_{p_1}(x) = a e^{-2x} \Rightarrow y'_{p_1} = -2a e^{-2x}$ 0,5 et $y''_{p_1} = 4a e^{-2x}$

Remplaçons y_{p_1}, y'_{p_1} et y''_{p_1} dans (E1) :

$4ae^{-2x} - 4(-2ae^{-2x}) + 4ae^{-2x} = e^{-2x} \Rightarrow$

$16ae^{-2x} = e^{-2x} \Rightarrow 16a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{16}$. Alors

$y_{p_1} = \frac{1}{16}e^{-2x}$. 0,5

* la solution particulière pour $g(x) = e^{2x}$:

On peut rechercher une solution particulière de la forme

$y_{p_2} = b x^2 e^{2x} \Rightarrow y'_{p_2} = 2bxe^{2x} + 2bx^2e^{2x} = 2b(x^2+x)e^{2x}$

0,5

et $y''_{p_2} = 4be^{2x}(x^2+x) + 2b(2x+1)e^{2x}$

$= 2b(2x^2+4x+1)e^{2x}$.

Remplaçons y_{p_2}, y'_{p_2} et y''_{p_2} dans $(E1)$:

$(4\cancel{b}x^2 + 8\cancel{b}x + 2b - 8\cancel{bx^2} - 8\cancel{bx} + 4\cancel{bx^2})\cancel{e^{2x}} = \cancel{e^{2x}}$ 0,5

$\Rightarrow 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$. Alors

$y_{p_2} = \frac{1}{2}x^2 e^{2x}$. 0,5