Université Abdelhafid Boussouf - Mila 2022 – 2023
Institut des Sciences et de la Technologie
Département des Mathématiques et informatique **Algèbre** 2

Série no 4 : Résolution des systèmes linéaires

Exercice 1. *Trouver la solution du système suivant :*

$$(S) \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 9x_4 & = & 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 & = & 6 \end{cases}$$

Exercice 2. *Résoudre les systèmes linaires suivants, où a est un paramètre réel donné.*

$$(S_1) \quad \begin{cases} x - ay + a^2z & = & a \\ ax - a^2y + az & = & 1 \\ ax + y - a^3z & = & 1 \end{cases}$$

$$(S_2) \quad \begin{cases} ax + y + z & = & a^2 \\ x + ay + z & = & a \\ x + y + az & = & 1 \end{cases}$$

$$(S_3) \quad \begin{cases} ax & = & 0 \\ x + my - z + t & = & 1 \\ x - y + az - t & = & 2 \\ x + y - z & = & 3 \end{cases}$$

Exercice 3. *Soient a, b, c, α, β des réels et (S) le système linéaire, d'inconnues x, y, z, t, donné par :*

$$(S) \quad \begin{cases} x + y + z + t & = & a \\ x - y - 2z + 2t & = & b \\ 2x + y + \alpha z + \beta t & = & c. \end{cases}$$

1. *Donner l'écriture matricielle du système (S).*

2. *Soient*

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & \alpha \end{vmatrix}, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & \beta \end{vmatrix} \quad et \quad \delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & \alpha & \beta \end{vmatrix}.$$

Calculer δ_1, δ_2 et δ_3.

3. *En déduire le rang de (S) suivant les valeurs de α et β.*

4. *On suppose que $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $\beta = \dfrac{5}{2}$.*

a. *Calculer $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$. En déduire le rang de (S).*

b. *Calculer* $\delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & b \\ 2 & 1 & c \end{vmatrix}$.

c. *Quelle relation doivent satisfaire* a, b, c *pour que* (S) *soit compatible.*

5. *On suppose que* $a = b = 1$, $c = 2$, $\alpha = \frac{1}{2}$ *et* $\beta = \frac{5}{2}$. *Résoudre le système* (S).

Exercice 4. *Soit* m *un réel et* (S_m) *le système linéaire, d'inconnues* x, y, z, *donné par :*

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = 1 \\ x + y + z = m \end{cases}$$

Résoudre le système (S_m) *en utilisant la méthode de Gauss.*

0.1 Solutions

Solution d'Exercice 2 **1.**La matrice associé au système (S_1) est

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ a & -a^2 & a \\ a & 1 & -a^3 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 0 & 0 & a - a^3 \\ 0 & 1 + a^2 & 0 \end{vmatrix} = -(1 + a^2)(a - a^3) = a^5 - a = a(a-1)(a+1)(a^2+1).$$

- Si $a \notin \{-1, 0, 1\}$, alors $\det(A_1) \neq 0$. Donc dans ce cas le système est de Cramer. Par suite, il admet une seule solution (x, y, z) telle que

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & -a & a^2 \\ 1 & -a^2 & a \\ 1 & 1 & -a^3 \end{vmatrix}}{\det(A_1)} = \frac{a \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & -a^2 & a \\ 1 & 1 & -a^3 \end{vmatrix}}{a^5 - a} = \frac{a \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & -1 + a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a + a^3 \end{vmatrix}}{a^5 - a} = a,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 1 & a \\ a & 1 & -a^3 \end{vmatrix}}{\det(A_1)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 - a^2 & a - a^3 \\ 0 & 1 - a^2 & -2a^3 \end{vmatrix}}{a^5 - a} = \frac{(1 - a^2)(-a - a^3)}{a^5 - a} = 1,$$

et

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -a & a \\ a & -a^2 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A_1)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -a & a \\ 0 & 0 & 1 - a^2 \\ 0 & 1 + a^2 & 1 - a^2 \end{vmatrix}}{a^5 - a} = \frac{1}{a},$$

- Si $a=0$, le système devint

$$\begin{cases} x=0 \\ 0=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Donc, le système n'admet pas de solutions.

- Si $a=1$, le système devient

$$\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+y-z=1. \end{cases}$$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions de (S_1) est $\{(1,z,z) \ : \ z\in\mathbb{R}\}$.

- Si $a=-1$, le système devient

$$\begin{cases} x+y+z=-1 \\ -x+y+z=1. \end{cases}$$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions de (S_1) est $\{(-1,-z,z) \ : \ z\in\mathbb{R}\}$.

2. La matrice associé au système (S_2) est

$$A_2=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

On a

$$\det(A_2)=\begin{vmatrix} 0 & 1-a^2 & 1-a \\ 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a \end{vmatrix}=-(1-a^2)(1-a)+(1-a)(a-1)=-(a-1)^2(a+2).$$

- Si $a\notin\{-2,1\}$, alors $\det(A_2)\neq 0$. Donc dans ce cas le système est de Cramer. Par suite, il admet une seule solution (x,y,z) telle que

$$x=\frac{\begin{vmatrix} a^2 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{\det(A_2)}=\frac{a\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1-a^2 & 1-a^3 \\ 0 & 0 & 1-a^2 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{-(a-1)^2(a+2)}=\frac{(1-a^2)^2}{-(a-1)^2(a+2)}=-\frac{(1+a)^2}{(a+2)},$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{\det(A_2)}=\frac{\begin{vmatrix} 0 & a^2-a & 1-a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{-(a-1)^2(a+2)}=\frac{(a-1)^2}{-(a-1)^2(a+2)}=\frac{-1}{a+2},$$

et

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a & 1 & a^2 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A_2)}=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1-a^2 & 0 \\ 1 & a & a \\ 0 & a-1 & a-1 \end{vmatrix}}{-(a-1)^2(a+2)}=\frac{(a-1)^2(a+1)}{-(a-1)^2(a+2)}=-\frac{(a+1)}{a+2},$$

- Si $a=-2$, le système devint

$$\begin{cases} -2x+y+z=4 \\ x-2y+z=-2 \\ x+y-2z=1 \end{cases}$$

i.e

$$\begin{cases} -2x+y+z=4 \\ -2x+y+z=1 \\ x+y-2z=1 \end{cases}$$

Donc, le système (S_2) n'admet pas de solutions.

- Si $a=1$, le système devient

$$x+y+z=1.$$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions de (S_2) est $\{(x,y,1-x-y)\ :\ x,y\in\mathbb{R}\}$.

3. La matrice associé au système (S_3) est

$$A_3=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\det(A_3)=a\cdot\begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & a & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=a\cdot\begin{vmatrix} a & a-1 & 1 \\ -1 & -1+a & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=2a(1-a).$$

- Si $a\notin\{0,1\}$, alors $\det(A_3)\neq 0$. Donc dans ce cas le système est de Cramer. Par suite, il admet une seule solution (x,y,z) telle que

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & -1 & 1 \\ 2 & -1 & a & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\det(A_3)}=0,$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & a & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\det(A_3)}=\frac{a\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{2a(1-a)}=\frac{a\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1+a & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{2a(1-a)}=\frac{-3a}{2(1-a)},$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{\det(A_3)}=\frac{a\cdot\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{2a(1-a)}=\frac{a\cdot\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a-1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{2a(1-a)}=\frac{3(a-2)}{2(1-a)},$$

et

$$t=\frac{\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0\\ 1 & a & -1 & 1\\ 1 & -1 & a & 2\\ 1 & 1 & -1 & 3\end{vmatrix}}{\det(A_3)}=\frac{a\cdot\begin{vmatrix} a & -1 & 1\\ -1 & a & 2\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}}{2a(1-a)}=\frac{a\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1+a^2 & 1+2a\\ -1 & a & 2\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}}{2a(1-a)}=\frac{-3(a-2)}{2a},$$

- Si $a=0$, le système devint

$$\begin{cases} x-z+t=1\\ x-y-t=2\\ x+y-z=3\end{cases}$$

i.e

$$\begin{cases} z=x+t-1\\ y=x-t-2\\ x+y-z=3\end{cases}$$

Donc, les solutions du système (S_3) sont $\{(2t+4,t+2,3t+3,t)\ :\ t\in\mathbb{R}\}$.

- Si $a=1$, le système devient le système devint

$$\begin{cases} x=0\\ x+y-z+t=1\\ x-y+z-t=2\\ x+y-z=3\end{cases}$$

i.e

$$\begin{cases} x=0\\ y-z+t=1\\ -y+z-t=2\\ y-z=3\end{cases}$$

Donc, le système n'admet pas des solutions.

Solution d'Exercice 3 **1.** L'écriture matricielle du système (S) est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -2 & 2\\ 2 & 1 & \alpha & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}.$$

2. On a

$$\delta_1=-2\alpha+1,\quad \delta_2=-2\beta+5\quad \text{et}\quad \delta_3=-3\alpha-\beta+4.$$

3. On a $\mathrm{rg}(S)\leq 3$ (il y a 3 équations). Si $\delta_1=\delta_2\delta_3=0$, c'est à dire $\alpha=\dfrac{1}{2}$ et $\beta=\dfrac{5}{2}$, alors $\mathrm{rg}(S)\leq 2$.

Puisque $\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2\neq 0$, alors $\mathrm{rg}(S)=2$.

Si l'un des δ_i est non nul (c'est à dire $\alpha\neq\dfrac{1}{2}$ ou $\beta\neq\dfrac{5}{2}$), alors $\mathrm{rg}(S)=3$.

4. On suppose que $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $\beta = \dfrac{5}{2}$.

a. $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, alors $\mathrm{rg}(S) = 2$.

b. $\delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & b \\ 2 & 1 & c \end{vmatrix} = 3a + b - 2c$.

c. Pour que (S) soit compatible il faut et il suffit que $3a + b - 2c = 0$.

5. Puisque $\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\beta = \dfrac{5}{2}$, alors (S) de rang 2. De plus $a = b = 1$, $c = 2$ implique que (S) est compatible (d'après 4.c).

Pour résoudre (S), on se ramène à la résolution du système principal :

$$(S_P) \quad \begin{cases} x + y = 1 - z - t \\ x - y = 1 + 2z - 2t \end{cases}$$

Par conséquent l'ensemble des solutions est $\left\{ \left(\dfrac{2 + z - 3t}{2}, \dfrac{-3z + t}{2}, z, t \right) \ : \ z, t \in \mathbb{R} \right\}$.

Solution d'Exercice 4 La matrice augmenté des seconds membres associée au système est :

$$\begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{pmatrix};$$

on effectue $L_1 \longleftrightarrow L_4$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

l'opération $L_2 \longleftrightarrow L_3$, nous donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ m & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

en effectuant $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$ et $L_4 \longleftarrow L_4 - mL_1$ on aura :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & m-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 \end{pmatrix};$$

par $L_2 \longleftrightarrow L_3$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m \\ 0 & 0 & m-1 & 0 \\ 0 & 1-m & 1-m & 1-m^2 \end{pmatrix};$$

$L_4 \longleftarrow L_4 + L_2$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & m-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 0 & 0 & 2-m-m^2 \end{pmatrix}.$$

Le système qu'on obtient est :

$$\begin{cases} x+y+z=m \\ (m-1)y=0 \\ (m-1)z=1-m \\ 0z=(1-m)(m+2) \end{cases}$$

Si $m \neq 1$ et $m \neq -2$, le système est incompatible.
Si $m = 1$, le système est équivalent à $x+y+z=1$ et l'ensemble des solutions est $\{(1-y-z, y, z) \ : \ y, z \in \mathbb{R}\}$.
Si $m = -2$, l'ensemble des solutions est $\{-1, 0, -1)\}$.