Série no 3 : Matrices

Exercice 1. ***1.*** *Écrire les matrices des applications linéaire suivantes dans les bases canoniques :*

$$\begin{array}{rccc} f_1: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y+3z, 2y-z, x+z). \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} f_2: & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ & P & \longmapsto & XP-P'+P(1). \end{array}$$

2. *Écrire la matrice d'applications linéaire suivante*

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{C}_1[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ & P & \longmapsto & (\overline{P(1-i)}, \mathrm{Re}(P(i))), \end{array}$$

dans les bases $\{1, i, X, iX\}$ *et* $\{(1,0),(i,0),(0,1),(0,i)\}$.

Exercice 2. *On considère les matrices suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Parmi les produits suivants AB, BC et CB, lesquels ont un sens ?*
2. *Calculer AC, ${}^tAB\,{}^tC$ et B^2.*
3. *Déterminer les coefficients manquants des matrices pour que les égalités sont vrai :*

$$\begin{pmatrix} \cdot & 1 \\ \cdot & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \cdot & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdot \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & -5 & 2 \\ -3 & 4 & 7 \\ -1 & \cdot & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & 2 & -4 \\ -5 & -2 & \cdot \\ 1 & \cdot & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & 10 & -3 \\ -4 & 7 & \cdot \\ 39 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Exercice 3. *En utilisant deux méthodes différentes, calculer l'inverse des matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. ***1.*** *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A(\lambda)$ la matrice*

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & \lambda \\ 2\lambda-1 & \lambda & 1 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda \end{pmatrix}$$

(a) *Calculer le déterminant de $A(\lambda)$.*

(b) *Déterminer en fonction de λ le rang de la matrice $A(\lambda)$.*

2. *Déterminer le nombre λ tel que la matrice $A - \lambda I_n$ ne soit pas inversible, avec*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad et \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. *(Supplémentaire)*
Soit f l'application définie par :

$$\begin{aligned} f: \; M_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto f(M) = \begin{pmatrix} x-y & t-z \\ z-t & y-x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Posons

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que f est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$.*
2. *Trouver la matrice de f dans la base canonique $B = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ de $M_2(\mathbb{R})$.*
3. *Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base B' de $\mathrm{Im}(f)$.*
4. *Soit $g \in \mathcal{L}(F)$ tel que $g(M) = f(M), \forall M \in M_2(\mathbb{R})$. Déterminer la matrice de g dans la base B' de F.*

Exercice 6. *(Supplémentaire)*
Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Calculer le déterminant de $2A - 6I_4$ sachant que $A^2 = 6A - 8I_4$ et que ce déterminant est positif.

0.1 Solutions

Solution d'Exercice 1 :

1. On sait que $B_{\mathbb{R}^3} := \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Puisque

$$\begin{array}{rcccl} f_1((1,0,0)) & = & (1,0,1) & = & (1,0,0)+(0,0,1), \\ f_1((0,1,0)) & = & (2,2,0) & = & 2(1,0,0)+2(0,1,0), \\ f_1((1,0,0)) & = & (3,-1,1) & = & 3(1,0,0)-(0,1,0)+(0,0,1), \end{array}$$

alors,

$$Mat_{B_{\mathbb{R}^3},B_{\mathbb{R}^3}}(f_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les familles $B_{\mathbb{R}_2[X]} := \{1, X, X^2\}$ et $B_{\mathbb{R}_3[X]} := \{1, X, X^2, X^3\}$ sont respectivement les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}_3[X]$. Le fait que

$$\begin{array}{rcl} f_2(1) & = & 1+X, \\ f_2(X) & = & X^2, \\ f_2(X^2) & = & 1-2X+X^3, \end{array}$$

implique

$$Mat_{B_{\mathbb{R}_2[X]},B_{\mathbb{R}_3[X]}}(f_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On a

$$\begin{array}{rcccl} g(1) & = & (\overline{1}, \mathrm{Re}(1)) & = & (1,1) = (1,0)+0\times(i,0)+(0,1)+0\times(0,i), \\ g(i) & = & (\overline{i}, \mathrm{Re}(i)) & = & (-i,0) = 0\times(1,0)-1\times(i,0)+0\times(0,1)+0\times(0,i), \\ g(X) & = & (\overline{1-i}, \mathrm{Re}(i)) & = & (1+i,0) = (1,0)+(i,0)+0\times(0,1)+0\times(0,i), \\ g(iX) & = & (\overline{i(1-i)}, \mathrm{Re}(i^2)) & = & (1-i,-1) = (1,0)-1\times(i,0)-(0,1)+0\times(0,i), \end{array}$$

d'où

$$Mat(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution d'Exercice 2 :

1. Puisque $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, alors les produit AB et BC ne sont pas définis par contre le produit CB est défini.

2. On a

$$AC = \begin{pmatrix} -2\times4+1\times0+0\times5 & -2\times0+1\times(-1)+0\times1 \\ 1\times4+0\times0+3\times5 & 1\times0+0\times(-1)+3\times1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -1 \\ 19 & 3 \end{pmatrix},$$

$$
\begin{aligned}
{}^tAB\,{}^tC &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2\times(-5)+1\times(-1) & -2\times 2+1\times 0 \\ 1\times(-5)+0\times(-1) & 1\times 2+0\times 0 \\ 0\times(-5)+3\times(-1) & 0\times 2+3\times 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -5 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 9\times 4-4\times 0 & 9\times 0-4\times 1 & 9\times 5-4\times 1 \\ -5\times 4+2\times 0 & -5\times 0+2\times(-1) & -5\times 5+2\times 1 \\ -3\times 4+0\times 0 & -3\times 0+0\times(-1) & -3\times 5+0\times 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 36 & 4 & 41 \\ -20 & -2 & -23 \\ -12 & 0 & -15 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

et

$$
B^2 = \begin{pmatrix} -5\times(-5)+2\times(-1) & -5\times 2+2\times 0 \\ -1\times(-5)+0\times(-1) & -1\times 2+0\times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & -10 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.
$$

3. On a

$$
\begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ z & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 2 & -1 \end{pmatrix}
$$

i. e

$$
\begin{pmatrix} 2x+z & 3x+5 \\ 2y+4z & 3y+20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 2 & -1 \end{pmatrix}
$$

d'où

$$
\begin{cases} 2x+z=0 \\ 3x+5=t \\ 2y+4z=2 \\ 3y+20=-1 \end{cases}
$$

on obtient alors $(x,y,z,t) = (-2,-7,4,-1)$. Par conséquent

$$
\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.
$$

On a

$$
\begin{pmatrix} x_1 & -5 & 2 \\ -3 & 4 & 7 \\ -1 & x_2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 & 2 & -4 \\ -5 & -2 & x_4 \\ 1 & x_5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_6 & 10 & -3 \\ -4 & 7 & x_7 \\ 39 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}
$$

i. e

$$
\begin{pmatrix} x_1x_3+27 & 2x_1+2x_5+10 & -4x_1-5x_4-10 \\ -3x_3-13 & 7x_5-14 & 4x_4+23 \\ -x_3-5x_2+6 & -2x_2+6x_5-2 & x_2x_4-26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_6 & 10 & -3 \\ -4 & 7 & x_7 \\ 39 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}
$$

ce qui donne le système

$$\begin{cases} x_1x_3+27=x_6\\ 2x_1+2x_5+10=10\\ -4x_1-5x_4-10=-3\\ -3x_3-13=-4\\ 7x_5-14=7\\ 4x_4-23=x_7\\ -x_3-5x_2+6=39\\ -2x_2+6x_5-2=x_8\\ x_2x_4-26=x_9 \end{cases}$$

on en déduit que $(x_1,x_2,x_3,x_5,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9)=(-3,-6,-3,1,3,36,-19,28,-32)$. Alors on a

$$\begin{pmatrix} -3 & -5 & 2\\ -3 & 4 & 7\\ -1 & -6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 & -4\\ -5 & -2 & 1\\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 36 & 10 & -3\\ -4 & 7 & -19\\ 39 & 28 & -32 \end{pmatrix}.$$

Solution d'Exercice 3 :

Première méthode :

1. On a

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}=1,$$

et

$$\mathrm{com}(A)=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2\\ 2 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2\\ -1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1\\ -1 & 2 \end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix} -3 & 5\\ 2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 5\\ -1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3\\ -1 & 2 \end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} -3 & 5\\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 5\\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3\\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

donc

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Calculons l'inverse de B. On a

$$\det(B)=\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}=3$$

et

$$\mathrm{com}(B)=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix} -1 & 2\\ -1 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} -1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2\\ 0 & 2 & 1\\ -3 & 0 & 3\end{pmatrix},$$

donc

$$B^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3\\ -1 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}.$$

Deuxième méthode : (pivot de Gauss)

1. On a

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_2 \longrightarrow L_2 - L_1\\ L_3 \longrightarrow L_3 + L_1\end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -3 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$L_3 \longleftrightarrow L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -3 & -1 & 1 & 0\end{array}\right)$$

$$L_2 \longleftrightarrow -L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -3 & -1 & 1 & 0\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \longrightarrow L_1 + 3L_2\\ L_3 \longrightarrow L_3 - 2L_2\end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \longrightarrow L_1 + L_3\\ L_2 \longrightarrow L_2 + 2L_3\end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2\end{array}\right)$$

2. Calculons l'inverse de la matrice B.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_1 \longleftrightarrow L_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 - L_1 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \longleftrightarrow -\frac{1}{3}L_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \longrightarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \longrightarrow L_2 + 2L_3 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$L_1 \longrightarrow L_1 - L_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right)$$

Solution d'Exercice 4 :

1. (a) On a

$$\begin{aligned} |A(\lambda)| &= (2-\lambda)\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda+1 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2\lambda-1 & 1 \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} 2\lambda-1 & \lambda \\ \lambda & \lambda+1 \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2-\lambda-1) - (2\lambda^2-2\lambda) + \lambda(\lambda^2+\lambda-1) \\ &= 2\lambda^2 - 2 = 2(\lambda-1)(\lambda+1). \end{aligned}$$

(b) Si $\lambda \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$, alors $\det(A(\lambda)) \neq 0$, par suite $\mathrm{rg}(A(\lambda)) = 3$. D'autre part, on a

$$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A(-1) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comme la famille $\{(1,1,1),(1,1,2)\}$ est libre, donc $\mathrm{rg}(A(1)) = 2$. Le fait que $(3,-3,-1) = 4(1,-1,0) + (-1,1,-1)$, implique $\mathrm{rg}(A(-1)) = 2$.

2. On sait que $A - \lambda I_n$ est non inversible si et seulement si $\det(A - \lambda I_n) = 0$. Puisque

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 24 - 11\lambda + \lambda^2 = (8-\lambda)(3-\lambda),$$

alors, $A - \lambda I_n$ est non inversible si et seulement si $\lambda \in \{3, 8\}$.
Le fait que

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ 4 & 6-\lambda & 0 \\ 5 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)((4-\lambda)(6-\lambda)-8) = (3-\lambda)(8-\lambda)(2-\lambda),$$

implique que $A - \lambda I_n$ est non inversible si et seulement si $\lambda \in \{2, 3, 8\}$.

Solution d'Exercice 5 : 1. Utiliser la définition
2. On a

$$f(M_1) = M_1 - M_4, \quad f(M_2) = -M_1 + M_4, \quad f(M_3) = -M_2 + M_3 \quad \text{et} \quad f(M_4) = M_2 - M_3.$$

Alors

$$Mat(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. On a

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow (x = y, z = t) \Leftrightarrow M = x(M_1 + M_2) + y(M_3 + M_4).$$

Donc, $\{M_1 + M_2, M_3 + M_4\}$ est une partie génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$. On vérifie qu'elle est libre.
D'autre part, on a

$$f\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right) = (x - y)(M_1 - M_4) + (-z + t)(M_2 - M_3).$$

Donc

$$B' = \{M_1 - M_4, M_2 - M_3\}$$

est une partie génératrice de $F = \mathrm{Im}(f)$. On vérifie qu'elle est libre.
4. On a

$$g(M_1 - M_4) = f(M_1) - f(M_4) = (M_1 - M_4) - (M_2 - M_3)$$

et

$$g(M_2 - M_3) = f(M_3) - f(M_3) = (-M_1 + M_4) - (-M_2 + M_3) = -(M_1 - M_4) + (M_2 - M_3).$$

Ce qui donne :

$$Mat(g, B') = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution d'Exercice 6 :
On a $2A - 6I_4 = 2(A - 3I_4)$, donc

$$\det(2A - 6I_4) = 2^4 \cdot \det(A - 3I_4).$$

D'autre part, on a

$$(A - 3I_4)^2 = A^2 - 6A + 9I_4 = 2I_4,$$

alors

$$(\det(A - 3I_4))^2 = \det((A - 3I_4)^2) = \det(2I_4) = 2^4.$$

Comme $\det(A - 3I_4) \geq 0$, on en déduit que $\det(A - 3I_4) = 2^2$ et que

$$\det(3A - 6I_4) = 2^6.$$