2.5 Exercices

Exercice 2.1 *Soit* $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *un bruit blanc, vérifier que les processus définis par :*

1. $X_t = \varepsilon_t, \forall t \in \mathbb{Z}$,
2. $Y_t = (-1)^t \varepsilon_t, \forall t \in \mathbb{Z}$.

sont stationnaires.
Montrer que leur somme $Z_t = X_t + Y_t, \forall t \in \mathbb{Z}$ *n'est pas un processus stationnaire.*

Exercice 2.2 *Parmi les séries chronologiques suivantes, déterminer celles qui sont centrées, stationnaires.*

1. $X_t = \frac{1}{t}\varepsilon_t$
2. $X_t = 0.2\varepsilon_t + t$
3. $X_t = \varepsilon_t^2 + 0.5\varepsilon_{t-1} + c^{st}$
4. $X_t = \varepsilon_t + 2\varepsilon_{t-1}$

Exercice 2.3 *Soit* $\{Z_t\}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes distribuées selon une loi normale de moyenne 0 et de variance* σ^2*, et soit* a*,* b *et* c *des constantes. Déterminer lequel ou lesquels des processus ci-dessous sont stationnaires. Pour chaque processus stationnaire, calculer la moyenne et la fonction d'autocovariance.*

1. $X_t = a + bZ_t + cZ_{t-2}$

2. $X_t = Z_1 \cos(ct) + Z_2 \sin(ct)$

3. $X_t = Z_t \cos(ct) + Z_{t-1} \sin(ct)$

4. $X_t = a + bZ_0$

5. $X_t = Z_t Z_{t-1}$

Indication *:* $\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$ *et* $\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$.

Exercice 2.4 *Soit* $\{X_t\}$ *et* $\{Y_t\}$ *deux séries stationnaires et non corrélées, c'est-à-dire que* $\mathrm{Cov}(X_r, Y_s) = 0$ *pour tous* r *et* s*. Démontrer que* $\{X_t + Y_t\}$ *est stationnaire avec fonction d'autocovariance égale à la somme des fonctions d'autocovariance de* $\{X_t\}$ *et* $\{Y_t\}$*.*