

Série N°3

Exercice 1 : Soit l'équation en temps discret suivante :

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} = f(x_n).$$

- 1) Déterminer les points fixes et étudier leurs stabilités.
- 2) Tracer la construction graphique des solutions dans le plan (x_n, x_{n+1}) .

Exercice 2 : Le modèle suivant est basé sur la relation de stock-recrutement proposée par Ricker (1954) dans le cadre de l'étude de la dynamique de populations de poissons, où $r > 0$ est le taux de croissance de la population et $K > 0$ sa capacité limite.

- 1) Montrer que ce modèle admet deux points fixes : 0 et K .
- 2) Montrer que 0 est toujours instable et que K est stable lorsque $0 < r < 2$.
- 3) Construire avec Matlab le diagramme de bifurcation du modèle de Ricker.

Exercice 3 : Rechercher le comportement asymptotique du modèle de Leslie défini par la matrice L suivante :

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 : Rechercher le comportement asymptotique du modèles de Leslie ou D'Usher défini par les matrices L suivantes :

$$1) L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & f_4 \\ s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 \end{pmatrix},$$

avec $s_1 = s_2 = s_3 = 0.2$ et $f_4 = 10$.

$$2) L = \begin{pmatrix} 0 & f_2 & f_3 & 0 \\ s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & p_4 \end{pmatrix},$$

avec $s_1 = s_2 = s_3 = 0.5$, $f_2 = 4$, $f_3 = 16$ et $p_4 = 0.2$.

- a) Indiquer si la matrice est réductible, irréductible, cyclique (en précisant l'indice d'imprimitivité) ou primitive. Si la matrice est réductible, indiquer comment la décomposer.
- b) Rechercher le taux de croissance asymptotique. Écrire pour cela l'équation caractéristique et, si nécessaire, en rechercher une solution évidente.
- c) Préciser si la population est en croissance, en extinction ou en équilibre.

Exercice 5 Le modèle suivant est une généralisation du modèle de Nicholson-Bailey qui décrit la dynamique d'un système hôte-parasitoïde

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lambda x_n \left(1 + \frac{ay_n}{b}\right)^{-b}, \\ y_{n+1} &= cx_n \left(1 - \left(1 + \frac{ay_n}{b}\right)^{-b}\right) \end{aligned}$$

où x_n et y_n sont respectivement le nombre d'hôtes et le nombre de parasitoïdes à la génération n . λ , est le taux de croissance intrinsèque des hôtes. a et b sont deux paramètres strictement positifs, c , est le nombre moyen de parasitoïdes viables issus d'un seul hôte parasité.

- 1) a) Pour quelle valeur de b on retrouve le modèle de Nicholson-Bailey ?
 b) Réécrire le modèle dans ce cas et étudier la stabilité des points fixes.
 c) Est-ce que il y a une possibilité de coexistence d'un hôte et son parasitoïde ?
- 2) Supposons maintenant que b est fini.
 a) Trouver les points fixes et étudier leurs stabilités.
 b) Pour quelles valeurs de b y a-t-il une possibilité de coexistence d'un hôte et son parasitoïde ?