Chapitre 5

Résolution des systèmes d'équations linéaires par les méthodes directes

5.1 Introduction

La solution des grands systèmes linéaires est un problème important en mécanique, en géophysique, en biologie, en simulation de circuits et dans de nombreuses autres applications dans le domaine de la science et de l'ingénierie computationnelles. En général, ces systèmes linéaires peuvent être résolus en utilisant des méthodes itératives directes ou indirectes.

- *Les méthodes itératives directes* : peuvent donner la valeur exacte de la solution après un nombre fini d'opérations.

- *Les méthodes itératives indirectes* : consistent à construire une suite de vecteurs x_k convergeant vers la solution exacte cherchée x. On s'arrête bien sûr au bout d'un nombre fini d'itérations n choisi pour que x_n soit suffisamment proche de solution exacte x. donc les méthodes itératives indirecte donnent que des solutions approchées.

Bien que les méthodes directes soient souvent plus fiables, elles nécessitent généralement une mémoire très grande et ne s'adaptent pas bien aux plates-formes informatiques massivement parallèles.

5.2 Rappel mathématique sur les matrices

5.2 1.Définition

Une matrice d'éléments de IR est un tableau à deux dimensions composé de m lignes et n colonnes. L'ensemble des matrices de IR de dimension m, n est noté $\mathrm{M}_{m,n}$ et forme un espace vectoriel sur IR

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

La matrice A contient trois lignes et quatre colonnes (m=3, n=4) on note $A_{3,4}$. ***C'est m=n, la matrice et dite carrée***.

5.2.2 Quelques propriétés

➢ Somme de deux matrices

Soient A et B deux matrices :

- $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m,n}\ 1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A + B = \begin{bmatrix} (a_{11}+b_{11}) & (a_{12}+b_{12}) & (a_{13}+b_{13}) & (a_{14}+b_{14}) \\ (a_{21}+b_{21}) & (a_{22}+b_{22}) & (a_{23}+b_{23}) & (a_{24}+b_{24}) \\ (a_{31}+b_{31}) & (a_{32}+b_{32}) & (a_{33}+b_{33}) & (a_{34}+b_{34}) \end{bmatrix} \qquad (2)$$

➢ Produit d'une matrice avec un nombre

- $\alpha A = [\alpha x_{ij}]_{m,n}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \to \alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} & \alpha a_{14} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} & \alpha a_{24} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} & \alpha a_{33} & \alpha a_{34} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

➢ Transposé

- On appelle une matrice A^t transposé de la matrice A, la matrice où les lignes inversés avec les colonnes telle que

$$a_{ij}^t = a_{ji} \qquad (4).$$

Donc, c'est la matrice A est de m linges et de n colonnes, la matrice A^t est de n lignes et de m colonnes.

$$A_{3,4} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 50 & 60 & 70 & 80 \\ 10 & 20 & 30 & 40 \end{bmatrix} \to A_{4,3}^t = \begin{bmatrix} 1 & 50 & 10 \\ 2 & 60 & 20 \\ 3 & 70 & 30 \\ 4 & 80 & 40 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

➢ Matrice carrée

Matrice carrée est une matrice dont le nombre des linges égal au le nombre des colonnes (n=m).

➢ Matrice symétrique

- Une matrice A (forcement est une matrice carrée) est dite symétrique si $A^t = A$ (autrement dit si $a_{i\,j} = a_{j\,i}$)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \end{bmatrix} = A^t \qquad (5.6)$$

➢ Matrice antisymétrique

Une matrice A est dite antisymétrique si $A^t = -A$ (autrement dit si $a_{i\,j} = -a_{j\,i}$)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} = -A \qquad (5.7)$$

➢ Matrice symétrique définie positive :

Une matrice symétrique est dite définie positive si elle vérifie l'une des quatre propriétés équivalente (si l'une des conditions soit vérifiée les trois autres sont obligatoirement vérifiés)

1. Toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.
2. Si pour tout vecteur $x \in IR^n \neq 0$: $x^t A x > 0$.
3. Les n déterminants principales de A (tous ses mineurs principaux) sont strictement positives.
4. Il existe une matrice L triangulaire inférieure tel que $A=LL^t$.

De la troisième condition A est strictement positive si :

I_1 I_2 I_n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} + \dots\dots\dots\dots a_{1n} \\ a_{21} + a_{22} + \dots\dots\dots\dots a_{2n} \\ . \\ . \\ . \\ a_{n1} + a_{m2} + \dots\dots\dots\dots a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (5.8)$$

tous ses mineurs principaux sont strictement positifs (det $A_{(k)_{1\le k\le n}} > 0$)

- $I_1=a_{11}>0$,
- $I_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} >0$,

  .

  .

  .
- $I_n=\det A > 0$.

Exemple 1

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (5.9)$$

- Il est clair que A est symétrique ($A^t=A$),

- **Première méthode :**

  Pour que A soit strictement positives il faut que tous ses mineurs sont strictement positives (A est (3x3), donc on trouve trois déterminants principaux):

  1- $I_1= a_{11}=1 >0$

  2- $I_2 = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = (1\times 2 - 1\times 1) = 1 > 0$

  3- $I_3 = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 1\times\det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - 1\times\det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 0\times\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 > 0$.

  Donc, la matrice A est symétrique strictement positive.

- **Deuxième méthode :**

$$x^t A x = (x_1\ x_2\ x_3)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = (x_1\ x_2\ x_3)\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}$$

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_2 + 2x_2 + x_2x_3 + x_2x_3 + 2x_3^2 = (x_1+x_2)^2 + (x_2+x_3)^2 + 2x_3^2 > 0 .$$

Donc, la matrice A est symétrique strictement positive.

Exemple 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$x^t Ax = (x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1 + 2x_2)^2 + 4{x_2}^2 > 0$, alors A est symétrique définie positive.

Remarque : pour vérifier qu'une matrice de grande taille soit strictement positive, on applique l'échelonnement de Gauss. C'est-à-dire rendre la matrice triangulaire supérieure et vérifier que tous les éléments diagonaux sont strictement positifs.

➢ Matrice identité

La matrice identité ou matrice unité est une matrice ***carrée*** avec tous ses éléments sont nulles sauf que la diagonale qui égal à 1.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

➢ Produit de deux matrices

- Soient $A \in M_{m,n}$ et $B \in M_{n,p}$ alors le produit $C \in M_{m,p}$ est donné par la formule, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}\ 1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n$
- Exemple

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$AB = \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}) & (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}) & (a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33}) \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}) & (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{33}) & (a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}) \\ (a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31}) & (a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32}) & (a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33}) \end{bmatrix}$$

- **Remarques** :
  - $AB \neq BA$
  - $ABC = (AB)C = A(BC)$
  - $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

- **Matrice inversible**

  On dit qu'une matrice est inversible si :

  - *la matrice est carrée,*
  - *son déterminant est non nul.*

Donc, pour une matrice A, il existe une matrice B de même taille avec les produits AB et BA sont égaux à la matrice identité.

$$AB=BA=I$$

Dans ce cas, la matrice B est unique. B est appelée matrice inverse de A est notée

$$B=A^{-1}.$$

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I.$$

- **Matrice triangulaire :** il y'a deux types des matrices triangulaires :

  - **Matrice triangulaire inférieure** ; A est dite triangulaire inférieure, si $a_{i\,j} = 0$ pour $j > i$

$$A_{n,m} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

  - **Matrice triangulaire supérieur** ; A est dite triangulaire supérieur, si $a_{i\,j} = 0$ pour $j < i$

$$A_{n,m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

5.3 Systèmes d'équations

On appelle système de m équations à n inconnues $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n$, la famille d'équations.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n}x_n = b_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Le système ne peut pas être résoluble si seulement si le nombre des équations égales au nombre des inconnus c'est à dire

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots a_{2n}x_n = b_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{n1}x_1 + a_{m2}\,x_2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

Le système peut être écrit sous la forme, $A\,X = B$.

Où:

- A est une matrice carrée donnée par les éléments $\left(a_{i\,j} \;\; 1 \le i \le n, 1 \le j \le n\;\right)$
- X est la matrice colonne des inconnus, et
- B est le vecteur représentant le deuxième membre du système.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots a_{1n} \\ a_{21} + a_{22} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots a_{2n} \\ . \\ . \\ . \\ a_{n1} + a_{m2} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} et\; b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix} \dots\dots\dots\dots$$

5.4 Résolution d'un système d'équations

Ils existent plusieurs méthodes directes pour la résolution de systèmes d'équations. Dans ce cours on va examiner trois méthodes : méthode de Gauss, méthode de Cholesky et la méthode de factorisation LU (factorisation de Crout et factorisation de Doolittle).

5.3.1 Méthode de Gauss :

La méthode de gauss ou élimination de Gauss, comme elle aussi appelée méthode du pivot de Gauss, consiste à transformer le système AX=b à un système triangulaire à l'aide d'un algorithme dit algorithme d'élimination de Gauss.

Le système AX=B peut être transformé à un système triangulaire supérieur ou à un système triangulaire inferieure. Généralement, la méthode de Gauss transforme le système à un système triangulaire supérieur.

Le système triangulaire supérieur est écrit sous la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{1\,n}x_n & = b_1 \\ \quad a_{22}x_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{2\,n}\,x_n & = b_2 \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \quad a_{n\,n}\,x_n & = b_n \end{cases} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 10$$

Remarque : les éléments a_{ij} et b_{ij} ne sont pas les même éléments que les éléments donnés dans le premier système.

À ce stade, nous pouvons trouver x_n à partir de la dernière ligne, puis nous remontons pour trouver x_{n-1} et ainsi de suite jusqu'à ce que nous puissions obtenir x_1.

Pour rendre un système non triangulaire à un système triangulaire, on peut servir des transformations suivantes :

- La permutation entre les lignes.

Exemple :

$$\begin{cases} x_2 + 4x_3 = -3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 + 4x_3 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

- La multiplication d'une équation par un constant non nulle Exemple

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ (x_2 + 4x_3) = (-3) \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ -2(x_2 + 4x_3) = -2(-3) \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

- Une équation peut être remplacée par une équation équivalente par l'ajout ou le retranche d'un certain nombre de fois une autre équation.

Exemple :

$$\begin{array}{ccccc} 2x_1 & -3x_2 & x_3 & = & 2 \\ & -2x_2 & -8x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & = & 1 \end{array} \xrightarrow{L_3 = L_3 - 1\times L_1} \begin{array}{ccccc} 2x_1 & -3x_2 & x_3 & = & 2 \\ & -2x_2 & -8x_3 & = & 6 \\ & +2x_2 & & = & -1 \end{array}$$

- **Procédure de la méthode de Gauss**
  - Au départ, on regroupe A et b dans une seule matrice,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{vmatrix}$$

$$c - \text{à} - d : [A : b] = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \dots & a_{1\,n}^{(1)} & . & b_1^{(1)} \\ \vdots & \dots & . & . & . \\ a_{n\,1}^{(1)} & \dots & a_{n\,n}^{(1)} & . & b_n^{(1)} \end{bmatrix} \longrightarrow$$

- Trans formation de la matrice A en une matrice triangulaire supérieure

Etape1 : On pose $A = A^{(1)} \ et\ b = b^{(1)}$

- Choisir la première équation de telle sorte que ${a_{11}}^{(1)} \neq 0$.
- On fait les opérations suivantes :

L₁ est maintenue $\Leftrightarrow \begin{cases} L_1^{(2)} = L_1^{(1)} \\ L_i^{(2)} = L_i^{(1)} - \frac{{a_{i1}}^{(1)}}{{a_{11}}^{(1)}} L_1^{(1)} \ ; i = 2 \dots n \end{cases}$

On obtient alors :

$$\left[A^{(2)} : b^{(2)}\right] = \begin{bmatrix} {a_{11}}^{(2)} & {a_{12}}^{(2)} & \dots b_1^{(2)} \\ 0 & {a_{22}}^{(2)} & \dots b_2^{(2)} \\ 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n\,2}^{(2)} & \dots b_n^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Etape2:

- Choisir la deuxième équation de telle sorte que ${a_{22}}^{(2)} \neq 0$.

$$\begin{cases} L_1^{(3)} = L_1^{(1)} \\ L_2^{(3)} = L_2^{(2)} \\ L_i^{(3)} = L_i^{(2)} - \dfrac{{a_{i2}}^{(2)}}{{a_{22}}^{(2)}} L_i^{(2)} \quad i = 3 \dots n \end{cases}$$

.

.

.

$$\begin{cases} L_k^{(k+1)} = L_k^{(k)} \\ L_i^{(k+1)} = L_i^{(k)} - \dfrac{{a_{ik}}^{(k)}}{{a_{kk}}^{(k)}} L_k^{(k)} \qquad i = k - 1 \dots n \end{cases}$$

En fin, on obtient la forme (10) du système, la détermination de x_n puis x_{n-1}... (résolution par remonte) est évidente.

Exemple :

On va résoudre le système suivant par la méthode de gauss :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 11 \end{cases}$$

$$\mathrm{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & \vdots & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \vdots & 2 \\ 3 & 2 & 6 & \vdots & 11 \end{bmatrix}$$

Etape 1 : élimination de x_1

$$L_2^{(2)} \longrightarrow L_2^{(1)} - 2L_1^{(1)}$$

$$L_3^{(2)} \longrightarrow L_3^{(1)} - 3L_1^{(1)}$$

$$\mathrm{A}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & -4 & -4 & \vdots & 2 \\ 0 & -7 & -3 & \vdots & 11 \end{bmatrix}$$

Etape 2 : élimination de x_2 :

$$L_3^{(3)} \longrightarrow L_3^{(2)} - (-7)L_2^{(2)}$$

$$\mathrm{A}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & -4 & -4 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 4 & \vdots & 15/2 \end{bmatrix}$$

On remplace inversement on obtient

$$4x_3 = -3 \Rightarrow x_3 = 15/8$$

$$-x_2 - x_3 = 2 \Rightarrow x_2 = -19/8$$

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3/2$$

$$\mathrm{x}= \begin{pmatrix} 3/2 \\ -19/8 \\ 15/8 \end{pmatrix}$$

5.3.2 Méthode de Cholesky :

La méthode de Cholesky est utilisable lorsque la matrice A est symétrique définie positive (voir paragraphe 5.2.2)

Soit le système $Ax = b$.

Si A est une matrice symétrique définie positive, donc A peut-être décomposer sous la forme, A=LL^t, ou L est une matrice triangulaire inferieure.

Le système

$$Ax = b \quad \rightarrow \quad LL^t x = b \quad \rightarrow \quad L(L^t x) = b \text{ …..}$$

On transforme le système à deux systèmes simples à résoudre (puisque L et L^t : sont des matrices triangulaire). On pose, $L^t x = Y$, donc on trouve le vecteur y de l'équation,

$$LY = b \ldots\ldots\ldots..$$

Ensuite, de l'équation

$$L^t x = Y \ldots\ldots.$$

Construction de la matrice triangulaire inferieure $L = \left(l_{i\,j}\right)$. On a $A = L\, L^t$ où $A = (a_{\,ij})$.

$$a_{\,ij} = \sum_{k=1}^{n} \ell_{i\,k}\, \ell_{j\,k} \qquad j \leq i$$

Donc : $a_{11} = \ell_{11}^{\,2} \Rightarrow \ell_{11} = \sqrt{a_{11}}$ et $a_{i1} = \ell_{i1}\ell_{11} \Rightarrow \ell_{i1} = \frac{a_{i1}}{\ell_{11}}\ \overline{i = 2, n}$

La construction de la matrice L se fait colonne par colonne

$$\ell_{k\,k} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{\ell-1} \ell_{k\,j}^{2}}$$

Et : $a_{i\,k} = \sum_{j=1}^{k} \ell_{i\,j}\ell_{k\,j} = \ell_{i\,k}\ell_{k\,k} + \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{i\,j}\ \ell_{k\,j}$

Donc : $\ell_{i\,k} = a_{i\,k} - \sum_{j=1}^{k-1} \ell_{i\,j}\ \ell_{k\,j})/\ell_{k\,k}$

Exemple 3 :

Soit le système Ax=b, où A = $\begin{bmatrix} 9 & 3 & 15 \\ 3 & 5 & 7 \\ 15 & 7 & 42 \end{bmatrix}$ et $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix}$.

- Condition pour que A symétrique définie positive.

- $A=A^t$ est symétrique

- Est-ce- que A est définie positive

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 15 \\ 3 & 5 & 7 \\ 15 & 7 & 42 \end{bmatrix}$$

$I_1 = 9 > 0$

$I_2 = det \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 45 - 9 = 36 > 0$

$$I_3 = \det(A) = 9 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 42 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 15 & 42 \end{vmatrix} + 15 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 15 & 7 \end{vmatrix}$$
$$= 9(161) - 3(21) + 15(54)$$

$$= 1449 - 63 - 810 = 576 > 0$$

$$A = L\,L^t = \begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{21} & \ell_{31} \\ 0 & \ell_{22} & \ell_{32} \\ 0 & 0 & \ell_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \ell_{11}^2 & \ell_{11}\ell_{21} & \ell_{11}\ell_{31} \\ \ell_{21}\ell_{11} & {\ell_{21}}^2 + {\ell_{22}}^2 & \ell_{21}\ell_{31} + \ell_{22}\ell_{32} \\ \ell_{31}\ell_{11} & \ell_{31}\ell_{21} + \ell_{32}\ell_{22} & \ell_{31}^2 + \ell_{32}^2 + \ell_{33}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 15 \\ 3 & 5 & 7 \\ 15 & 7 & 42 \end{bmatrix}$$

La 1ère colonne :

$\ell_{11}^2 = 9 \Rightarrow \ell_{11} = 3$

$\ell_{21}\ell_{11} = 3 \Rightarrow \ell_{21} = 1$

$\ell_{31}\ell_{11} = 15 \Rightarrow \ell_{31} = 5$

La 2ème colonne :

$\ell_{21}^2 + \ell_{22}^2 = 5 \Rightarrow \ell_{22} = 2$

$\ell_{31}\ell_{21} + \ell_{32}\ell_{22} = 7 \Rightarrow \ell_{32} = 1$

La 3ème colonne :

$$\ell_{31}^2 + \ell_{32}^2 + \ell_{33}^2 = 42 \quad \ell_{33} = 4$$

$$\Rightarrow L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow L^t = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$LY = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 15 \end{bmatrix} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} LY = b \\ L^t x = y \end{cases} \qquad L^t x = y \leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{vmatrix} \ldots\ldots$$

Remarque :

On a $A_{k} = L_{k} L_{k}^{t}$ ou L_{k} sont les matrice composées des k premières lignes et k premières colonnes de A et de L

det $A_{k} = (l_{11} . l_{22}. l_{33} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots l_{kk})^2 = l_{11}^2 . l_{22}^2 . l_{33}^2 \ldots \ldots \ldots \ldots . . l_{kk}^2$>0 est symétrique définie positive).

- La méthode de Cholesky permet de calculer det A par :det $A = \prod_{i=1}^{n} \ell_{ii}^2$.

5.4 Méthode de factorisation LU (Crout ou Doolittle).

Cette méthode consiste à factoriser la matrice **A** en deux matrices triangulaires ; une triangulaire inférieure ***L*** (L vient de Lower ; inférieure en français) et l'autre triangulaire supérieure ***U*** (U vient de Upper ; supérieur en français), à condition que l'une des deux matrices a tous les éléments diagonaux égaux à l'unité.

- Si les éléments de la diagonale de L qui sont égaux à l'unité ($l_{ii} = 1$), la méthode dite méthode ***décomposition LU*** de ***Doolittle***,
- Si les éléments de la diagonale de U qui sont égaux à l'unité ($u_{ii} = 1$), la méthode dite méthode ***décomposition LU*** de ***Crout***.

Le système est donné par :

$$AX=b.$$

A s'écrire sou la forme ;

$$A=LU$$

donc le système est de nouveau donnée par

$$LUX=b$$

$$L(UX)=b$$

on pose

$$UX=Y$$

On résout le système en deux étapes :

1. Puisque U est triangulaire supérieure, on peut trouver facilement le vecteur Y par,

$$LY=b.$$

2. Ainsi, puisque L est triangulaire inferieur, on trouve facilement le vecteur x par, UX=Y

Donc, le système AX=b est décomposé en deux systèmes triangulaires faciles à résoudre.

$$Ax = b :\to LUx = b :\to L(Ux) = b :\to \begin{cases} Ux = y ....1 \\ Ly = b........2 \end{cases} \text{..................}$$

Le système à matrice triangulaire supérieure est résolu par substitution directe (descendant) et celui à la matrice triangulaire inférieure est résolu par substitution inverse (remontant).

5.4.1 Détermination des matrices L et U

Théorème 1 :

Une condition nécessaire et suffisante pour que A soit décomposable en un produit L.U est que tous ses mineurs fondamentaux soient différents de zéro.

Théorème 2 :

Si A est inversible et factorisable en un produit LU, alors cette décomposition est unique.

- **Algorithme de factorisation A = L.U (Version de DOOLITTLE)**

Afin de déterminer les éléments $l_{ij}(\forall i > j)$ de la matrice L et les éléments $u_{ij}(\forall j \le i)$ de la matrice U, on peut utiliser la version suivante de l'algorithme de factorisation :

$$\begin{cases} l_{ii} = 1 \; \forall i \\ l_{ij} = \dfrac{\left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \right]}{u_{jj}} \quad \forall i > j \\ u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \quad \forall i \le j \end{cases}$$

- **Algorithme de factorisation A = L.U (Version de Crout)**

Afin de déterminer les éléments de la matrice L et les éléments de la matrice U, on peut utiliser la version suivante de l'algorithme de factorisation :

$$\begin{cases} u_{ii} = 1 \; \forall i \\ l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \quad \forall i \le j \qquad \text{....................} \\ u_{ij} = \dfrac{\left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \right]}{l_{ii}} \quad \forall i < j \end{cases}$$

$$L=\begin{bmatrix} l_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \qquad U=\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Les éléments de chaque matrice sont donnés par :

$l_{ki} = a_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{kj}\, u_{ji}$

Avec : $i=2,3,\ldots\ldots,n$ et $k=i,i+1,\ldots\ldots,n$

$$u_{ik} = \frac{\left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\, u_{jk}\right)}{l_{ii}}$$

Exemple :

Soit $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ et $b=\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$

On applique l'algorithme de Crout et Doolittle pour résoudre le système AX=b.

On cherche $L=\begin{bmatrix} l_{12} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}$ et $U=\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tel que A=LU

- On identifie la première colonne de A et la première colonne de LU, cela permet d'obtenir la première colonne de L:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & l_{22} & 0 \\ -2 & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

– On identifie la première ligne de A avec la première ligne de LU, cela permet d'obtenir la première ligne de U :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & l_{22} & 0 \\ -2 & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

– On identifie la deuxième colonne de A avec la deuxième colonne de LU, cela permet d'obtenir la deuxième colonne de L:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

– On identifie la deuxième ligne de A avec la deuxième ligne de LU, cela permet d'obtenir la deuxième ligne de U :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

-On identifie la troisième colonne de A avec la troisième colonne de LU, cela permet d'obtenir la troisième colonne de L:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Puis on remplace dans

$\begin{cases} LY = b \\ UX = Y \end{cases}$ on obtient

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 4/3 \\ 1 \end{bmatrix}$ Et

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Alors :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$