

Chapitre 4

Résolution des équations différentielles ordinaires du premier ordre

4.1 Introduction :

Une équation différentielle ordinaire (ODE, *Ordinary Differential Equation*) est une équation reliant une variable réelle et ses dérivées, c'est à dire de la forme suivante :

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = f(t, y(t)) \quad (1)$$

où y est la fonction inconnue, \dot{y} sa dérivée et t la variable réelle.

Exemple 1 :

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = y \quad (2)$$

La solution de cette équation peut être trouvée analytiquement (c'est-à-dire, en suivant une approche analytique simple), la solution est donnée par :

$$y(t) = ce^t \quad (3)$$

Donc, Il existe d'innombrables de solutions à cette équation différentielle en raison de la constante d'intégration c . Pour déterminer la solution appropriée à notre état physique, nous devons nous baser sur les données déjà connues, généralement spécifiées via deux catégories de conditions ou deux catégories de problèmes :

➤ Conditions initiales (Problème de Cauchy)

La condition initiale donne la valeur de la fonction et ses dérivés à un temps donné dit temps initial. D'une autre manière il faut connaître la valeur de la fonction y et ses dérivés à l'état initiales pour trouver les valeurs de la fonction aux autres points du domaine.

à une valeur initiale t_0 , on a

$$y(t_0) = y_0 \quad (4)$$

Donc on peut évaluer la valeur de c via cette condition initiale. Si l'on obtient l'exemple donné par la relation 3, à $t=0$, $y(0)=1$ la valeur de c sera égale à 1 et la solution finale sera donnée par :

$$y(t) = e^t. \quad (6)$$

➤ **Condition aux limites (Problème aux limites)**

Les conditions aux limites donnent les valeurs de la fonction à la frontière de l'intervalle de définition (ou l'intervalle dans lequel on cherche la solution de cette équation).

$$\begin{aligned} y(t_0) &= y_0 \\ y(t_n) &= y_n \end{aligned} \quad (7)$$

Dans le présent cours on s'intéresse seulement à la solution des ODS dans le problème de Cauchy (c'est-à-dire si on connait la condition initiale).

Soit l'équation différentielle

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [t_0, T] \quad (8)$$

Avec la condition initiale (problème de Cauchy) $y(t_0) = y_0$

L'exemple donné par l'équation 3 est très facile à résoudre analytiquement, mais il existe énormément des ODS que l'on ne peut pas résoudre analytiquement. Dans ces cas, l'analyse numérique propose des méthodes numériques pour trouver une solution approchée.

Le problème de Cauchy est un problème d'évaluation, c'est à dire à partir de la condition initiale, on peut évaluer la valeur de y_1 à $t_1 = t_0 + \Delta t$ et évaluer la valeur de y_2 à partir de y_1 et ainsi de suite.

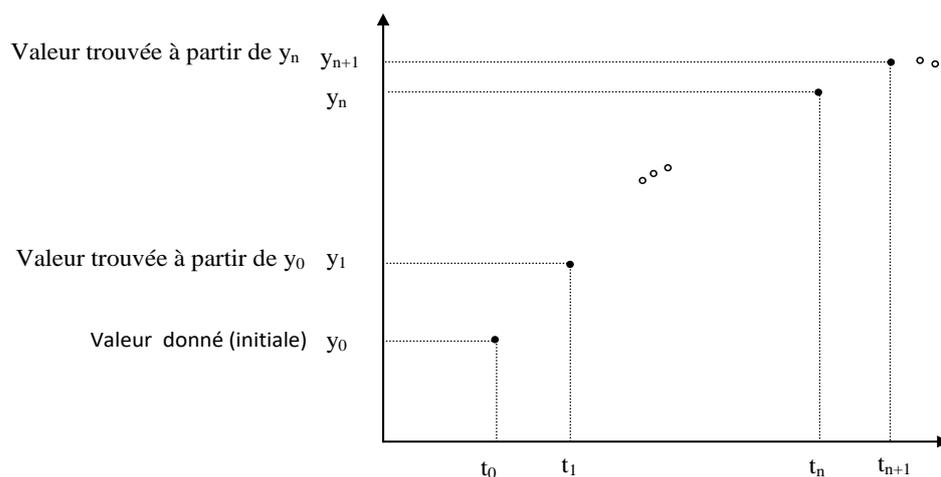


Figure 4.1 : schéma illustrant la méthode

- si y_{n+1} est uniquement fonction de t_n et y_n , on dit que le **Schéma à un pas**

4.2 Unicité de la solution

Si on suppose que la fonction f est continue par rapport aux deux variables t, y et que f est uniformément Lipchitzienne par rapport à y c'est à dire :

$$\forall t \in [t_0, T], \quad \forall y_1 \text{ et } y_2 \in \mathbb{R}, \exists L > 0, |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Donc, l'équation différentielle admet une solution unique $y \in C^1([t_0, T])$.

- **Question :** La question qui se pose, quelle est la méthode pour évaluer la valeur de y_1 à partir de la valeur de y_0 ?

- **Réponse :** L'idée se base sur la linéarisation. C'est-à-dire, on suppose que la courbe entre les deux points est une ligne droite.

- **Question :** Mais,

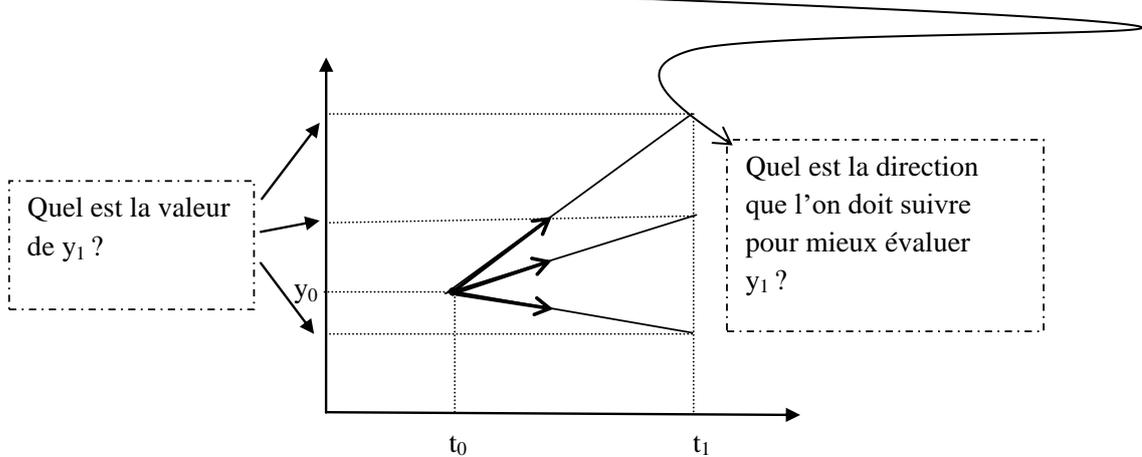


Figure 4.2 :

- **Réponse :** la direction qui donne une meilleur estimation de la valeur de y_1 à $t_1 = t_0 + \Delta t$ est donnée par le développement de Taylor.

Le développement de Taylor est donné par :

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{dy}{dt} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{d^3y}{dt^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{d^4y}{dt^4} + O(h^5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_n = y(t_n) \\ h = t_{n+1} - t_n \\ O(h^5) \end{array} \right.$$

A partir de cette développement on peut déduire la direction que l'on doit suivre pour trouver la meilleur estimation de y à $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. Cette idée va être éclairée dans les paragraphes suivants.

4. 2 Méthode D'Euler

L'équation différentielle ordinaire du premier ordre est donnée par :

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = f(t, y(t))$$

Si on prend seulement le premier terme du développement de Taylor, donc on admet que la valeur de $y_{n+1} = y(t + \Delta t)$ peut-être évaluer par :

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{dy}{dt},$$

Sachant que

$$\text{Exemple explicatif : } \dot{y} = \frac{dy}{dt} = y + t,$$

$$\text{Ça veut dire que : } f(t_n, y(t_n)) = y_n + t_n$$

$$\frac{dy}{dt} = f(t_n, y(t_n))$$

$\frac{dy}{dt}$: représente la pente de f au point (y_n, t_n)

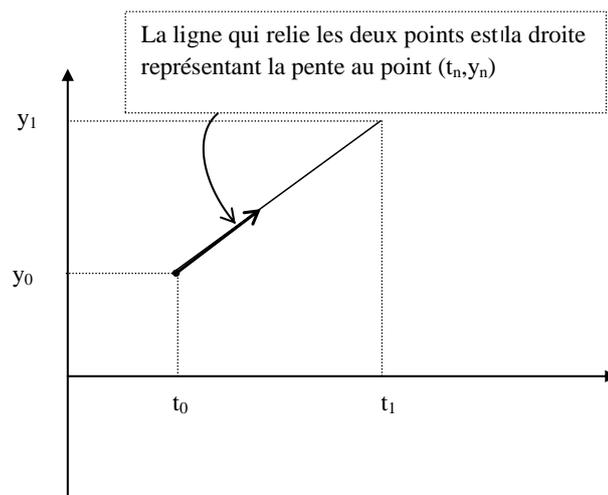


Figure :

On peut représenter ce développement graphiquement par la figure ci-dessous

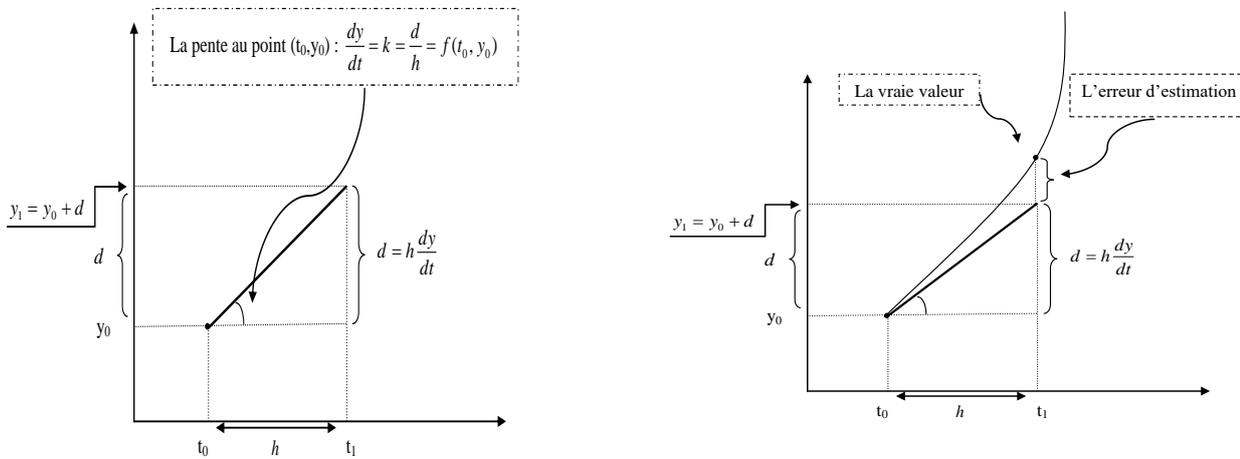
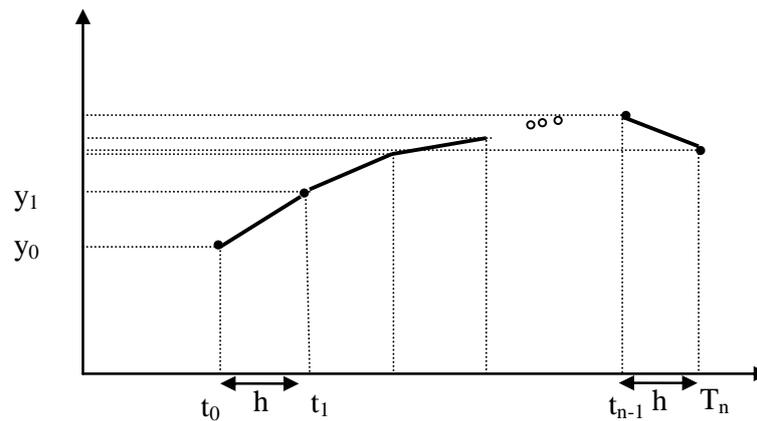


Figure 4 4. Schéma explicatif comment évaluer la valeur d'une valeur de y à partir de la valeur précédente

De la même manière on peut évaluer tous les valeurs de y dans l'intervalle donné

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) \\ y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \end{array} \right.$$

Figure 4. 6 : La courbe estimée e y ans l'intervalle $[t_0 T_n]$ **Remarques :**

1. Il est très clair que y_{n+1} est mieux estimé lorsque h est petit.
2. On peut réécrire l'équation d'Euler par :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h a k \\ a = 1 \\ k = f(t_n, y_n) \end{cases}$$

Exemple 4. 1

Soit l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

La solution exacte (la solution analytique) de cette équation est donnée par

$$y = e^t$$

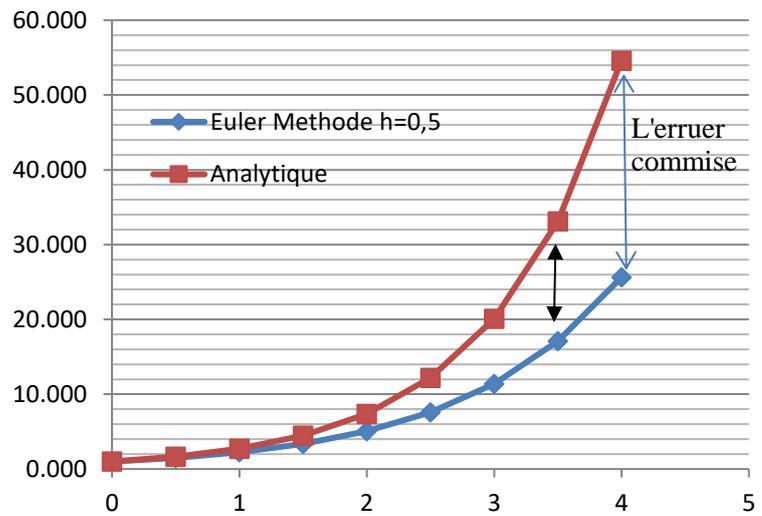
Nous voulons trouver les valeurs de y (la solution de l'équation différentielle) numériquement dans l'intervalle $t \in [0 \quad 4]$ avec la méthode d'Euler dans deux cas ($h=0.5$ et $h=0.1$)

$$y_{i+1} = y_i + h f(t_i, y(t_i))$$

$$\begin{cases} y_1 = y_0 + h f(t_0, y(t_0)) \\ y_1 = 1 + 0.5 \times 1 = 1.50 \\ y_2 = 1.5 + 0.5 \times 1.5 = 2.50 \\ \vdots \end{cases}$$

De cette manière on va remplir le tableau suivant ;

| h=0,5 | | | y=exp(t) |
|-------|------|---------------------|------------|
| n | Time | Euler Methode h=0,5 | Analytique |
| 0 | 0 | 1,000 | 1,000 |
| 1 | 0,5 | 1,500 | 1,649 |
| 2 | 1 | 2,250 | 2,718 |
| 3 | 1,5 | 3,375 | 4,482 |
| 4 | 2 | 5,063 | 7,389 |
| 5 | 2,5 | 7,594 | 12,182 |
| 6 | 3 | 11,391 | 20,086 |
| 7 | 3,5 | 17,086 | 33,115 |
| 8 | 4 | 25,629 | 54,598 |



| h=0,1 | | | |
|-------|-----|-------|---------|
| n | xn | yn | y=ex(x) |
| 0 | 0 | 1,000 | 1,000 |
| 1 | 0,1 | 1,100 | 1,105 |
| 2 | 0,2 | 1,210 | 1,221 |
| 3 | 0,3 | 1,331 | 1,350 |
| 4 | 0,4 | 1,464 | 1,492 |
| 5 | 0,5 | 1,611 | 1,649 |
| 6 | 0,6 | 1,772 | 1,822 |
| 7 | 0,7 | 1,949 | 2,014 |
| 8 | 0,8 | 2,144 | 2,226 |
| 9 | 0,9 | 2,358 | 2,460 |
| 10 | 1 | 2,594 | 2,718 |
| 11 | 1,1 | 2,853 | 3,004 |
| 12 | 1,2 | 3,138 | 3,320 |
| 13 | 1,3 | 3,452 | 3,669 |
| 14 | 1,4 | 3,797 | 4,055 |
| 15 | 1,5 | 4,177 | 4,482 |
| 16 | 1,6 | 4,595 | 4,953 |
| 17 | 1,7 | 5,054 | 5,474 |
| 18 | 1,8 | 5,560 | 6,050 |
| 19 | 1,9 | 6,116 | 6,686 |
| 20 | 2 | 6,727 | 7,389 |

| h=0,1 | | | |
|-------|-----|--------|---------|
| n | xn | yn | y=ex(x) |
| 21 | 2,1 | 7,400 | 8,166 |
| 22 | 2,2 | 8,140 | 9,025 |
| 23 | 2,3 | 8,954 | 9,974 |
| 24 | 2,4 | 9,850 | 11,023 |
| 25 | 2,5 | 10,835 | 12,182 |
| 26 | 2,6 | 11,918 | 13,464 |
| 27 | 2,7 | 13,110 | 14,880 |
| 28 | 2,8 | 14,421 | 16,445 |
| 29 | 2,9 | 15,863 | 18,174 |
| 30 | 3 | 17,449 | 20,086 |
| 31 | 3,1 | 19,194 | 22,198 |
| 32 | 3,2 | 21,114 | 24,533 |
| 33 | 3,3 | 23,225 | 27,113 |
| 34 | 3,4 | 25,548 | 29,964 |
| 35 | 3,5 | 28,102 | 33,115 |
| 36 | 3,6 | 30,913 | 36,598 |
| 37 | 3,7 | 34,004 | 40,447 |
| 38 | 3,8 | 37,404 | 44,701 |
| 39 | 3,9 | 41,145 | 49,402 |
| 40 | 4 | 45,259 | 54,598 |

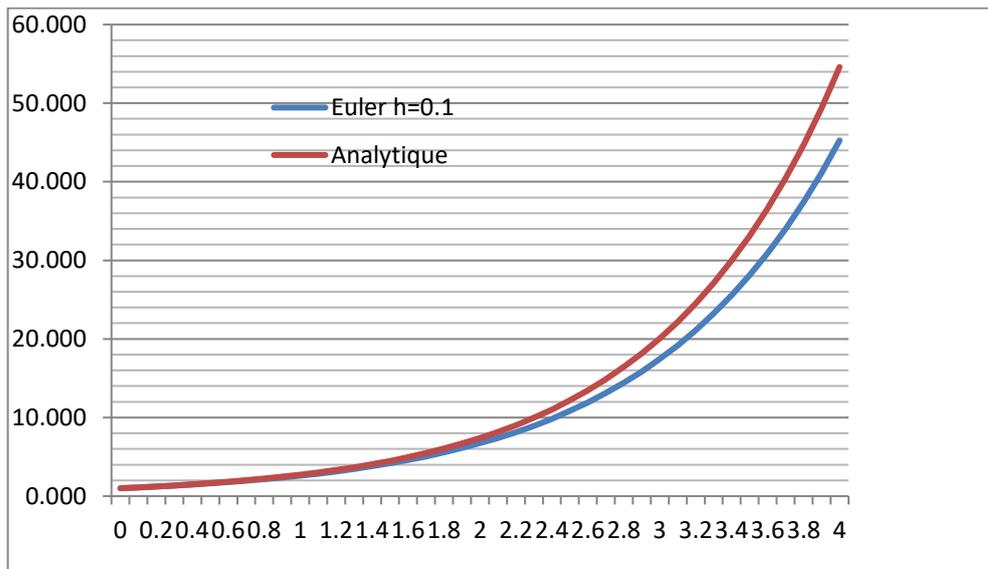


Figure : 4 : Courbe représente la solution de l'équation différentielle

La figure ci-dessous donne une bonne illustration sur la méthode d'Euler.

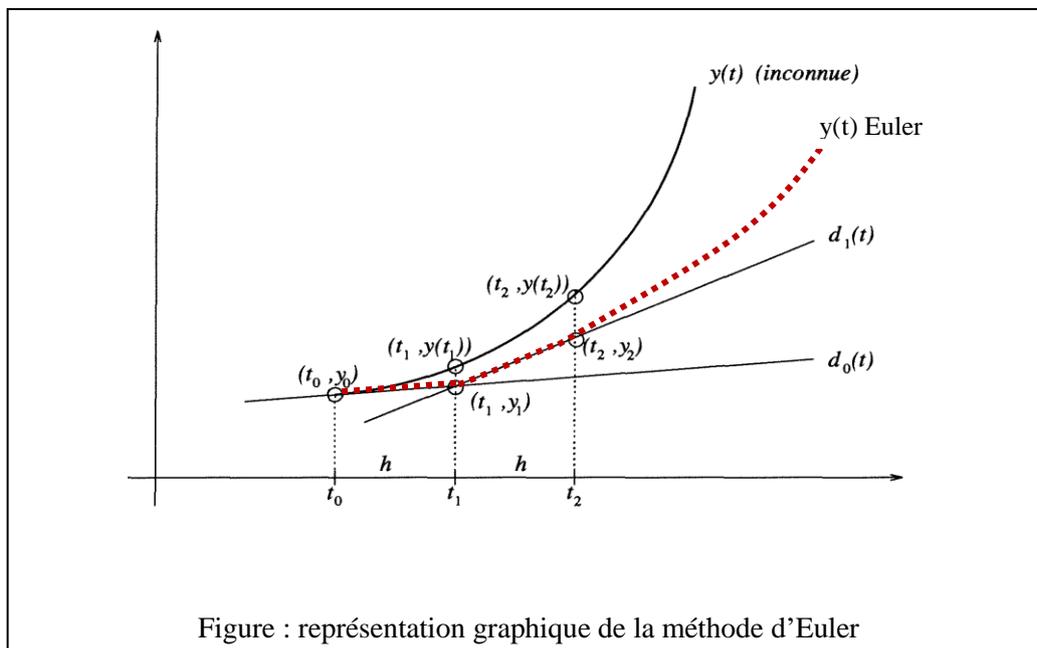


Figure : représentation graphique de la méthode d'Euler

4.3 Méthodes de Runge-Kutta

Pour trouver la direction que l'on doit suivre pour évaluer la valeur de y_{n+1} , les méthodes de Runge-Kutta, prennent en considération les ordres supérieurs dans le développement de Taylor.

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{dy}{dt} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{d^3 y}{dt^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{d^4 y}{dt^4} + \dots$$

On peut écrire :

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y(t_n)) + \frac{h^2}{2!} \frac{df(t_n, y(t_n))}{dt} + \frac{h^3}{3!} \frac{d^2 f(t_n, y(t_n))}{dt^2} + \frac{h^4}{4!} \frac{d^3 f(t_n, y(t_n))}{dt^3} + \dots$$

$$y_{n+1} = y_n + h \left(f(t_n, y(t_n)) + \frac{h}{2!} \frac{df(t_n, y(t_n))}{dt} + \frac{h^2}{3!} \frac{d^2 f(t_n, y(t_n))}{dt^2} + \frac{h^3}{4!} \frac{d^3 f(t_n, y(t_n))}{dt^3} + \dots \right)$$

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n)$$

Où

$$\Phi(t_n, y_n) = \left(f(t_n, y(t_n)) + \frac{h}{2!} \frac{df(t_n, y(t_n))}{dt} + \frac{h^2}{3!} \frac{d^2 f(t_n, y(t_n))}{dt^2} + \frac{h^3}{4!} \frac{d^3 f(t_n, y(t_n))}{dt^3} + \dots \right),$$

représente la moyenne des pente (la moyenne des directions que l'on doit suivre pour arriver à la meilleure estimation de y_{n+1} à partir de la valeur de y_n). Selon l'ordre du développement, on classe la famille des méthodes. Les classes de ses méthodes les plus utilisées sont, Runge-Kutta d'ordre 2 (RK2) et Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4).

Le développement mathématique est très lourd mais la relation général est donnée par :

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n)$$

$$\Phi(t_n, y_n) = \sum_i^s a_i k_i$$

- s : l'ordre des méthodes,
- k_i les pentes à des points donnés dans l'intervalle $[t_n \quad t_{n+1}]$,
- $\sum_i^s a_i = 1$

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} k_1 = f(t_n, y_n), \\ k_2 = f(t_n + b_2 h, y_n + h c_{21} k_1) \\ k_3 = f(t_n + b_3 h, y_n + h(c_{31} k_1 + c_{32} k_2)) \\ k_4 = f(t_n + b_4 h, y_n + h(c_{41} k_1 + c_{42} k_2 + c_{43} k_3)) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ k_s = f(t_n + b_s h, y_n + h(c_{s1} k_1 + c_{s2} k_2 + \dots c_{ss-1} k_{s-1})) \end{array} \right. \quad \text{où } \begin{cases} b_i : 1 \dots s \\ c_{ij} : 1 \leq j < i \leq s \end{cases}$$

les coefficients a_i, b_i et c_{ij} sont arrangés par le tableau Butcher :

| | | | | |
|-------|----------|----------|------------|---|
| 0 | | | | $\begin{cases} \sum_i^s a_i = 1 \\ \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} = b_i \end{cases}$ |
| b_2 | c_{21} | | | |
| b_3 | c_{31} | c_{32} | | |
| b_4 | c_{41} | c_{42} | c_{43} | |
| b_s | c_{s1} | c_{s2} | c_{ss-1} | |
| | a_1 | a_2 | a_s | |

4. 3. 1 Méthodes de Runge-Kutta d'ordre 1 (RK1)

$$\begin{cases} a_1 = a = 1 \\ k_1 = k = f(t_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n) \end{cases}$$

c'est la méthode d'Euler que nous avons étudiée au paragraphe précédent.

4. 3. 2 Méthodes de Range-Kutta d'ordre 2 (RK2)

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(a_1 k_1 + a_2 k_2) \\ k_1 = f(t_n, y_n), \\ k_2 = f(t_n + b_2 h, y_n + h c_{21} k_1) \end{cases}$$

Selon les valeurs de a_1, a_2, b_2 et c_{21} on distingue deux types de Runge-Kutta d'ordre 2 :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ b_2 & c_{21} & \\ \hline & a_1 & a_2 \end{array}$$

$$\sum_{i=1}^2 a_i = 1$$

$$\sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} = b_i$$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

(a)
Heun

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

(b)
Point milieu

➤ **Démonstration**

Cette méthode prend le développement de Taylor jusque le deuxième terme

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{dy}{dt} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2y}{dt^2}, \quad h = \Delta t, y_n = y_n(t_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + hf_n(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2} \frac{df_n(t_n, y_n)}{dt} \dots\dots\dots$$

$$y_{n+1} = y_n + hf_n(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2} \left[\frac{df_n(t_n, y_n)}{dt} + \frac{df_n(t_n, y_n)}{dy} \cdot \frac{dy_n(t_n, y_n)}{dt} \right] \dots\dots\dots$$

$$y_{n+1} = y_n + hf_n(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2} [f_{tn}(t_n, y_n) + f_{yn}(t_n, y_n) \cdot f_n(t_n, y_n)] \dots\dots\dots$$

Où $f_{tn}(t_n, y_n)$ et $f_{yn}(t_n, y_n)$ sont les dérivés de $f_n(t_n, y_n)$ par rapport à t et à y respectivement.

$$y_{n+1} = y_n + hf_n(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2} f_{tn}(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2} f_{yn}(t_n, y_n) \cdot f_n(t_n, y_n) \dots\dots\dots 10$$

L'équation 10 donne la formule finale du développement de Taylor.

On va faire le développement de Taylor mais cette fois de l'équation de Runge-Kutta d'ordre 2 donnée par :

$$y_{n+1} = y_n + ah_1f(t_n, y_n) + a_2hf(t_n + b_2h, y_n + hc_{21}f(t_n, y_n)) \dots\dots\dots$$

Alors,

$$y_{n+1} = y_n + ah_1f(t_n, y_n) + a_2h[f(t_n + y_n) + b_2hf_m(t_n, y_n) + hc_{21}f_{yn}(t_n, y_n)f_n(t_n, y_n)]$$

.....

$$y_{n+1} = y_n + (a_1 + a_2)hf(t_n, y_n) + a_2b_2hf_m(t_n, y_n) + a_2c_{21}hf_{yn}(t_n, y_n)f_n(t_n, y_n) \dots\dots\dots 12$$

On compare 10 et 12 on trouve,

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_2b_2 = \frac{1}{2} \dots\dots\dots \\ a_2c_{21} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

- ✓ $a_1 = a_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow b_2 = 1, c_{21} = 1 \dots\dots\dots$ cas de Heun,
- ✓ $a_1 = 0, a_2 = 1 \Rightarrow b_2 = \frac{1}{2}, c_{21} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots$ cas du point-milieu.

4. 3. 2. 1 Méthode de Heun (Euler modifiée)

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = \frac{1}{2} \\ c_{21} = b_2 = 1 \end{cases} \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \quad \begin{cases} k_1 = f(t_n, y_n), \\ k_2 = f(t_n + h, y_n + hk_1) \end{cases}$$

➤ **Représentation graphique :**

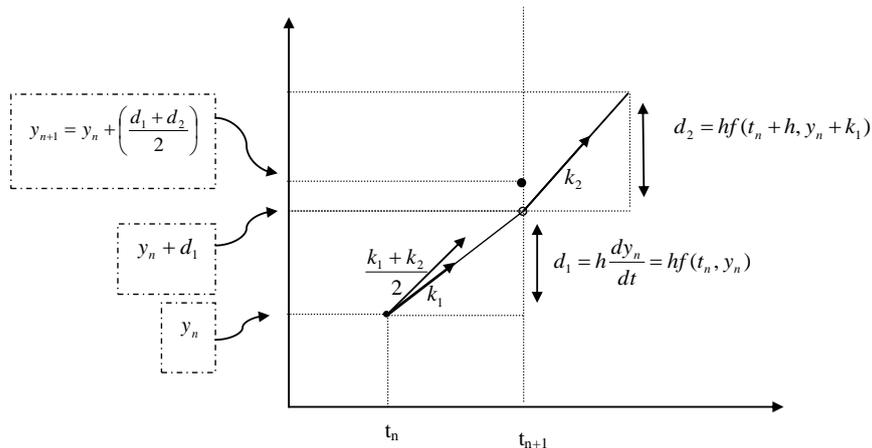


Figure 4. Représentation graphique de la méthode de Heun

k_1 : c'est la pente de y_n dans le point (t_n, y_n) ,

k_2 : c'est la pente de y_{n+1} dans le point $(t_{n+1}, y_n + hk_1)$.

4. 3. 2. 2 Méthode du Point- médian (Point-milieu)

$$\begin{cases} a_1 = 0, & a_2 = 1 \\ c_{21} = b_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, y_n), \\ k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1) \end{cases}$$

$$y_{n+1} = y_n + hk_2$$

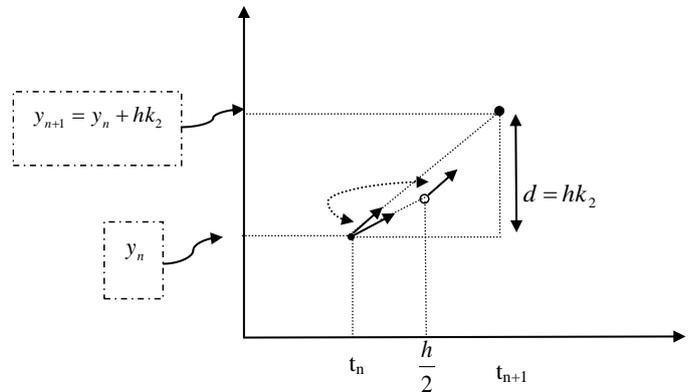


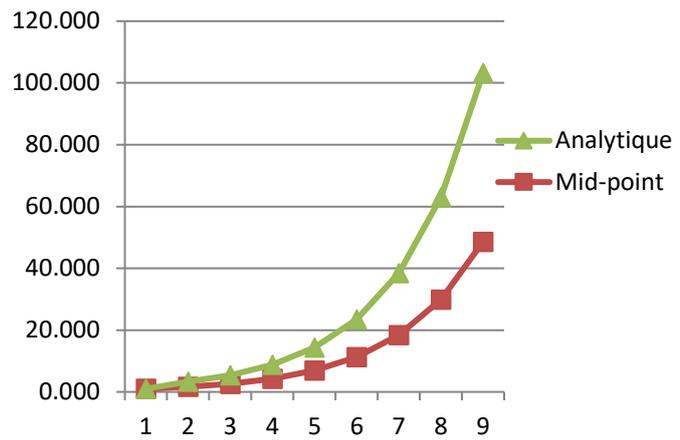
Figure 4. Représentation graphique

Exemple 4.3

On prend l'exemple précédent avec $h=0.5$

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{dy}{dt} = e^t \\ y(0) = 1 \end{cases} \dots\dots\dots$$

| h=0,5 | | | |
|-------|----------------|-----------|------------|
| n | t _n | Mid-point | Analytique |
| 1 | 0,000 | 1,000 | 0,000 |
| 2 | 0,500 | 1,625 | 1,649 |
| 3 | 1,000 | 2,641 | 2,718 |
| 4 | 1,500 | 4,291 | 4,482 |
| 5 | 2,000 | 6,973 | 7,389 |
| 6 | 2,500 | 11,331 | 12,182 |
| 7 | 3,000 | 18,413 | 20,086 |
| 8 | 3,500 | 29,921 | 33,115 |
| 9 | 4,000 | 48,621 | 54,598 |



a- Valeurs de y données par la méthode de Mid-point h=0.5

b- courbe comparatif de l'analytique et la méthode de Mid-point (h=0.5).

4.3.3. Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4)

Dans cette classe de méthodes, on prend en considération le développement de Taylor au 4^{ème} degré.

$$\begin{array}{c|cccc}
 0 & & & & \\
 b_2 & c_{21} & & & \\
 b_3 & c_{31} & c_{32} & & \\
 b_4 & c_{41} & c_{42} & c_{43} & \\
 \hline
 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4
 \end{array}
 \quad
 \begin{cases}
 \sum_{i=1}^s a_i = 1 \\
 \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} = b_i
 \end{cases}$$

Selon les conditions sur les constantes a_i , b_i et c_{ij} on peut trouver plusieurs méthodes de rang 4 (famille de RK4), mais la méthode la plus stable et qui donne des bonnes résultats est lorsque les constantes sont,

| | | | | |
|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 0 | | | | |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | | | |
| $\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | | |
| 1 | 0 | 0 | 1 | |
| | $\frac{1}{6}$ | $\frac{2}{6}$ | $\frac{2}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = f(t_n, y_n), \\ k_2 = f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1) \\ k_3 = f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2) \\ k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3) \end{array} \right.$$

La figure ci-dessous donne une illustration graphique pour la méthode de RK4

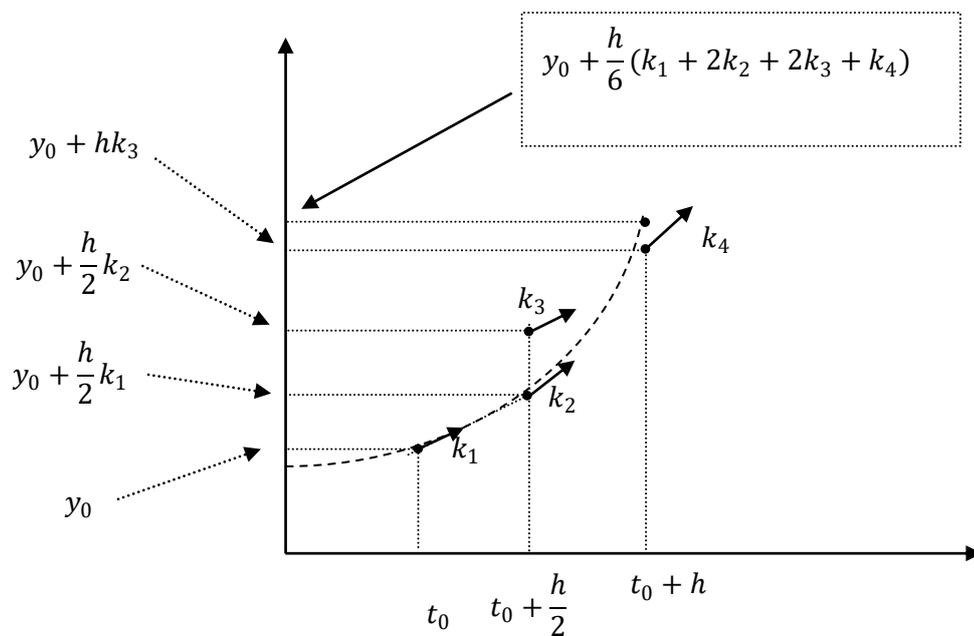


Figure : Représentation graphique de la méthode de Runge-Kutta 4 (RK4)

Exemple 4.

- a- Utiliser la méthode de Runge -Kutta d'ordre 4 pour calculer les trois premières itérations avec $h=0.1$ pour résoudre l'équation différentielle

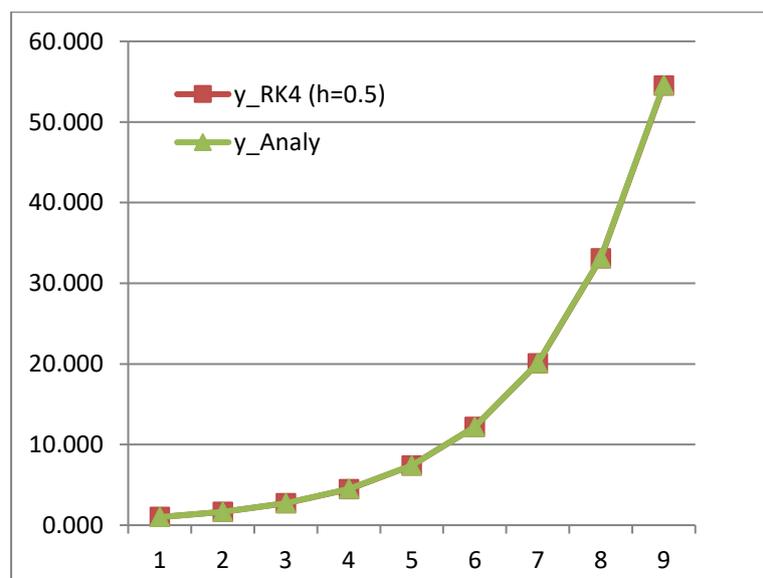
$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{dy}{dt} = e^t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

| n | h=0.1 | |
|---|------------------------|-------------------------------|
| 1 | k ₁ =0.2442 | y ₁ = 1.221 |
| | k ₂ =0.2687 | |
| | k ₃ =0.2711 | |
| | k ₄ =0.2985 | |
| 2 | k ₁ =0.2442 | y ₂ = 1.492 |
| | k ₂ =0.2687 | |
| | k ₃ =0.2711 | |
| | k ₄ =0.2985 | |
| 3 | k ₁ =0.2442 | y ₃ = 1.822 |
| | k ₂ =0.2687 | |
| | k ₃ =0.2711 | |
| | k ₄ =0.2985 | |

b- Utiliser la méthode de Runge -Kutta d'ordre 4 pour calculer les neuf itérations avec h=0.5 pour l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{dy}{dt} = e^t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

| h=0,5 | | | |
|-------|-------|--------|---------|
| n | t | y_RK4 | y_Analy |
| 1 | 0,000 | 1,000 | 1,000 |
| 2 | 0,500 | 1,648 | 1,649 |
| 3 | 1,000 | 2,717 | 2,718 |
| 4 | 1,500 | 4,479 | 4,482 |
| 5 | 2,000 | 7,384 | 7,389 |
| 6 | 2,500 | 12,172 | 12,182 |
| 7 | 3,000 | 20,065 | 20,086 |
| 8 | 3,500 | 33,076 | 33,115 |
| 9 | 4,000 | 54,523 | 54,598 |



Dans le tableau et le graphe suivants, on donne les valeurs et courbes pour les quatre méthodes précédentes (Euler, mid-point, Heun, RK4) et le resultat analytique.

| n | t | y_euler | y_mid | y_heun | y_RK4 | y_Analy |
|---|-------|---------|--------|--------|--------|---------|
| 1 | 0,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 |
| 2 | 0,500 | 1,500 | 1,625 | 1,625 | 1,648 | 1,649 |
| 3 | 1,000 | 2,250 | 2,641 | 2,641 | 2,717 | 2,718 |
| 4 | 1,500 | 3,375 | 4,291 | 4,291 | 4,479 | 4,482 |
| 5 | 2,000 | 5,063 | 6,973 | 6,973 | 7,384 | 7,389 |
| 6 | 2,500 | 7,594 | 11,331 | 11,331 | 12,172 | 12,182 |
| 7 | 3,000 | 11,391 | 18,413 | 18,413 | 20,065 | 20,086 |
| 8 | 3,500 | 17,086 | 29,921 | 29,921 | 33,076 | 33,115 |
| 9 | 4,000 | 25,629 | 48,621 | 48,621 | 54,523 | 54,598 |

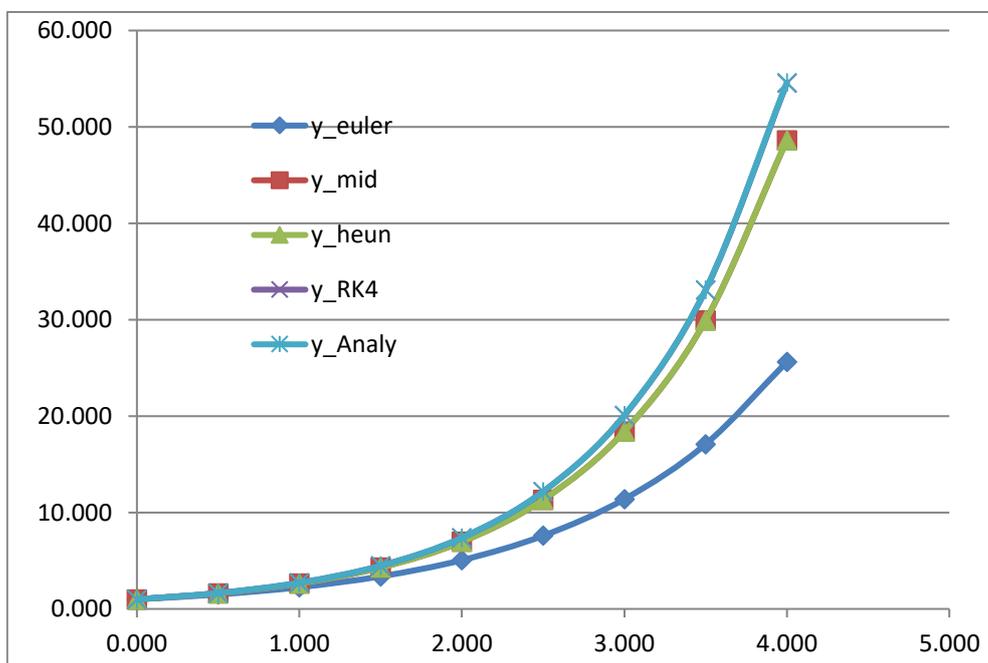


Figure : Représentation graphique des quatre méthodes

Remarque : comme nous avons dit dans le paragraphe précédent, il y'a plusieurs méthodes dans la même famille qui remplis les conditions des constantes a_i, b_i et c_{ij} ,

$$\begin{cases} \sum_i^s a_i = 1 \\ \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} = b_i \end{cases}$$

Une autre méthode donne des bonnes approximations données par le tableau de Butcher s'appelé **méthode de RK38**

| | | | | | |
|-----|------|-----|-----|-----|--|
| 0 | | | | | |
| 1/3 | 1/3 | | | | |
| 2/3 | -1/3 | 1 | | | |
| 1 | 1 | -1 | 1 | | |
| | 1/8 | 3/8 | 3/8 | 1/8 | |

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4) \\ k_1 = f(t_n, y_n), \\ k_2 = f(t_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}hk_1) \\ k_3 = f(t_n + \frac{2}{3}h, y_n + h(-\frac{1}{3}k_1 + k_2)) \\ k_4 = f(t_n + h, y_n + h(k_1 - k_2 + k_3)) \end{cases}$$