Chapitre2
Interpolation polynomiale.

2.1Introduction:

L'interpolation consiste à connecter des points de données discrets (figure 2.1a) de manière à obtenir des estimations raisonnables entre les points donnés(figure 2.1b et2.1c), ou de remplacer une fonction par une autre plus simple mais qui coïncide avec la première en un nombre fini de points donnés au départ (figure 2.1d).

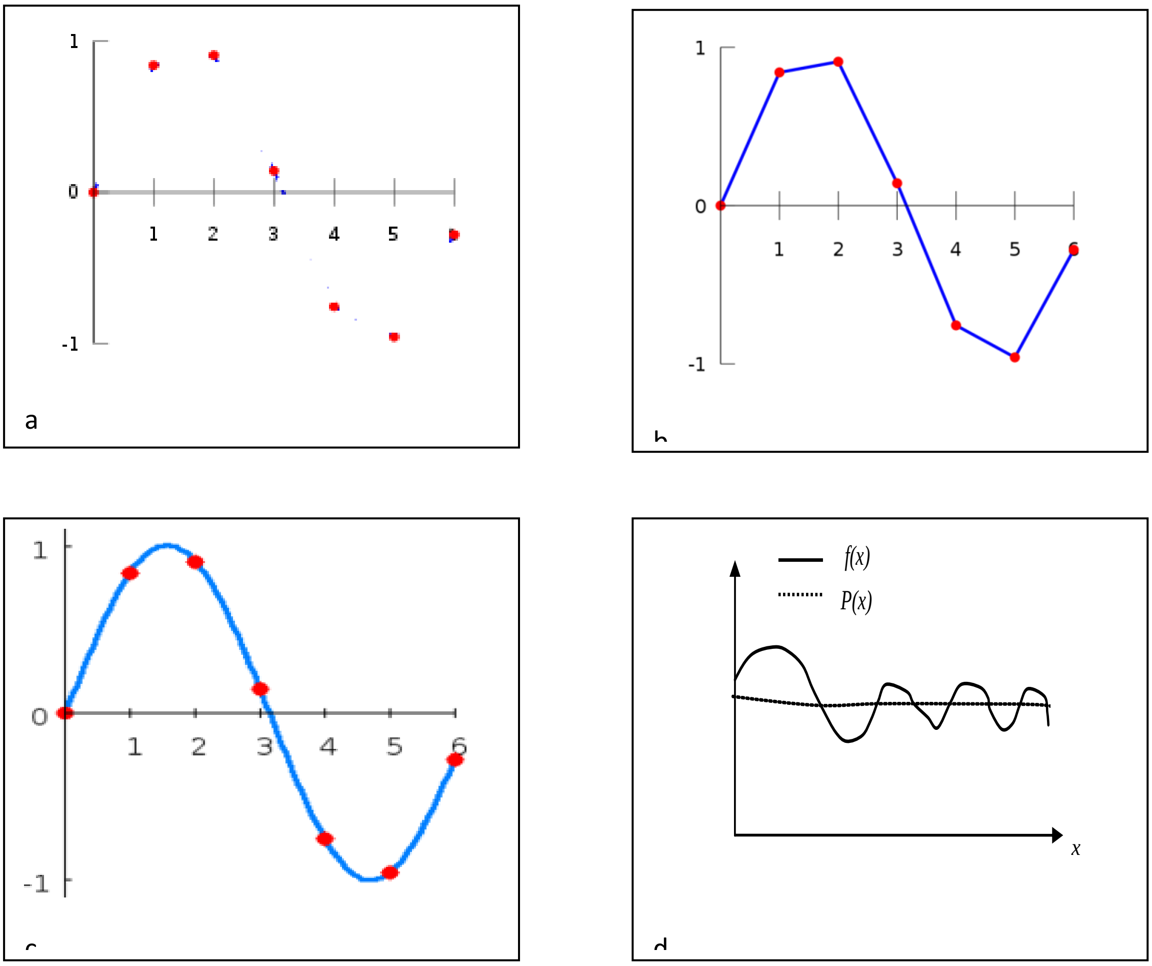


Figure 2.1 Représentation graphique de l'interpolation : a) point discrets, b) interpolation linéaire, c) interpolation polynomiale d) interpolation d'une fonction par un polynôme

Les points discrets peuvent être reliés par une ligne simple (figure 2.1b), donc l'interpolation est dite linéaire. Les points séparés peuvent également être reliés par un polynôme (figure 2.1c), dans ce cas, l'interpolation est appelée interpolation polynomiale. D'une autre manière, le but d'interpolation est de construire une fonction qui sert à donner la relation entre les points où on connait ses valeurs. Dans le présent chapitre on s'intéresse seulement à l'interpolation polynomiale………………...

Soit f une application de IR dans IR, dont on connait $(n \;\; +1)$ points $\left(x_i, f(x_i)\right)$ pour $i = 0, \dots \dots \dots . . , n$. Le but d'interpolation est de déterminer une fonction P simple à calculer, telle que : $\boldsymbol{P(x_i) = f(\mathrm{x_i})}$, avec $i = 0, \dots \dots \dots \dots . . , n$. $(f(x_i)$ représente la température, pression, débit, ...) pour connaître la valeur de la fonction mesurée en d'autres points dans le domaine, on peut alors représenter la fonction f par un polynôme.

Les points ($x_i, f(x_i)$) sont appelés point d'interpolation.

2.2 Unicité du polynôme d'interpolation :

Théorème 1:

Une condition nécessaire et suffisante pour qu' il existe un polynôme d'interpolation P_n unique est que les points d'interpolation x_i soient tous distincts.

2.3 Interpolation de Lagrange :

2.3.1 Polynôme de Lagrange

On appelle polynôme de Lagrange de degré n basé sur les points d'interpolations $(x_i, f(x_i))$,le polynôme unique d'ordre n qui passe exactement par ses (n+1) points (i=0,… n).Le polynôme unique P_n est donné par :

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}=\mathbf{0}}^{\boldsymbol{n}} \mathbf{L}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}).$$

Où :

$L_k(x)$ est le polynôme élémentaire de Lagrange donné par :

$$\mathbf{L}_k(\boldsymbol{x}) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i}{\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_i} \; i = 0, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots .., n$$

Avec $L_k(x_i)$ a une propriété intéressante

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = k \\ 0 \text{ si } i \neq k \end{cases}$$

Il existe un seul polynôme P_n vérifiant :

$\mathbf{P}_n(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{L}_k(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)$.

Exemple: soit le tableau suivant:

x_i	0	1	2	3
y_i	1	4	8	14

Trouver le polynôme de Lagrange déterminé par les points (x_i, y_i).

$P_3(x) =$ **L30** . $f(x_0)$ + **L31.** $f(x_1)$+ **L32.** $f(x_2)$+ **L33.** $f(x_3)$

$$\overbrace{\frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}}^{\textbf{L30}} f(x_0) + \overbrace{\frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}}^{\textbf{L31}} f(x_1)$$

L32 **L33**

L.BAZIZ

$$\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}f(x_2)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_1)}f(x_3)$$
$$=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}1+\frac{x(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}4$$
$$+\frac{(x-0)(x-1)(x-3)8}{(2-0)(2-1)(2-3)}+\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}14$$
$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{17}{6}+1$$

2.3.2 L'erreur d'interpolation

Théorème 2: Erreur d'interpolation de Lagrange

Soit $f \in c^{n+1}[a,b]$et $P_n(x)$ le polynôme d'interpolation de f sur les points $(x_i, f(x_i))$ pour $i = 0, \dots \dots \dots, n$.

L'erreur d'interpolation $|E(x)|= |f(x) - P_n(x)|$ est donné par :

$$|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})| \leq \frac{\boldsymbol{M}\prod_{i=0}^{n}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i|}{(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})!} \quad avec : M = max\{|f^{n+1}(\ \xi\ )|\} \qquad \xi \in [a,b]$$

Exemple3 :

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$

-Trouver le polynôme de Lagrange basé sur les points :

x_i	2	2.5	4
y_i	0.5	0.4	0.25

- Trouver l'erreur d'interpolation au point *x* = 3 et l'erreur estimée.

$$P_2(x) = \frac{1}{20}x^2 - \frac{51}{120}x + \frac{23}{20}$$

$$P_2(3) = \frac{1}{20}3^2 - \frac{51}{120}3 + \frac{23}{20} = 0.325$$

$P(3) = \frac{1}{3} = 0.333$

E=$|f(3) - P_2(3)| = 0.006$

$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2} \rightarrow f''(x) = \frac{2}{x^3} \longrightarrow f'''(x) = \frac{-6}{x^4}$

$M = 2$

$E_n(x) = 0.015$

2.4 Interpolation de Newton:

Le polynôme d'interpolation par la méthode de Newton est donné par

$\boldsymbol{p_n(x)} = \boldsymbol{a_0} + \boldsymbol{a_1(x - x_0)} + \boldsymbol{a_2(x - x_0)(x - x_1)}$ +………… $+\boldsymbol{a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots \dots (x - x_{n-1})}$

On utilise la méthode des différences divisées pour calculer les a_k.

2.4.1. Définition:

Soit $\{x_1, x_2, \dots \dots, x_{n+1}\}$ (n+1) points d'interpolation de $[a, b]$

et $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, \dots \dots . f(x_{n+1}) = y_{n+1}$

on pose: $\Delta x_\mathrm{i} = x_{\mathrm{i}+1} - x_\mathrm{i} \neq 0(\mathrm{i} = 1,2, \dots \dots)$ on appelle différences divisées d'ordre 1, les relation données par:

$$\Delta y_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - xi}$$

$$\Delta y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\Delta y_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$

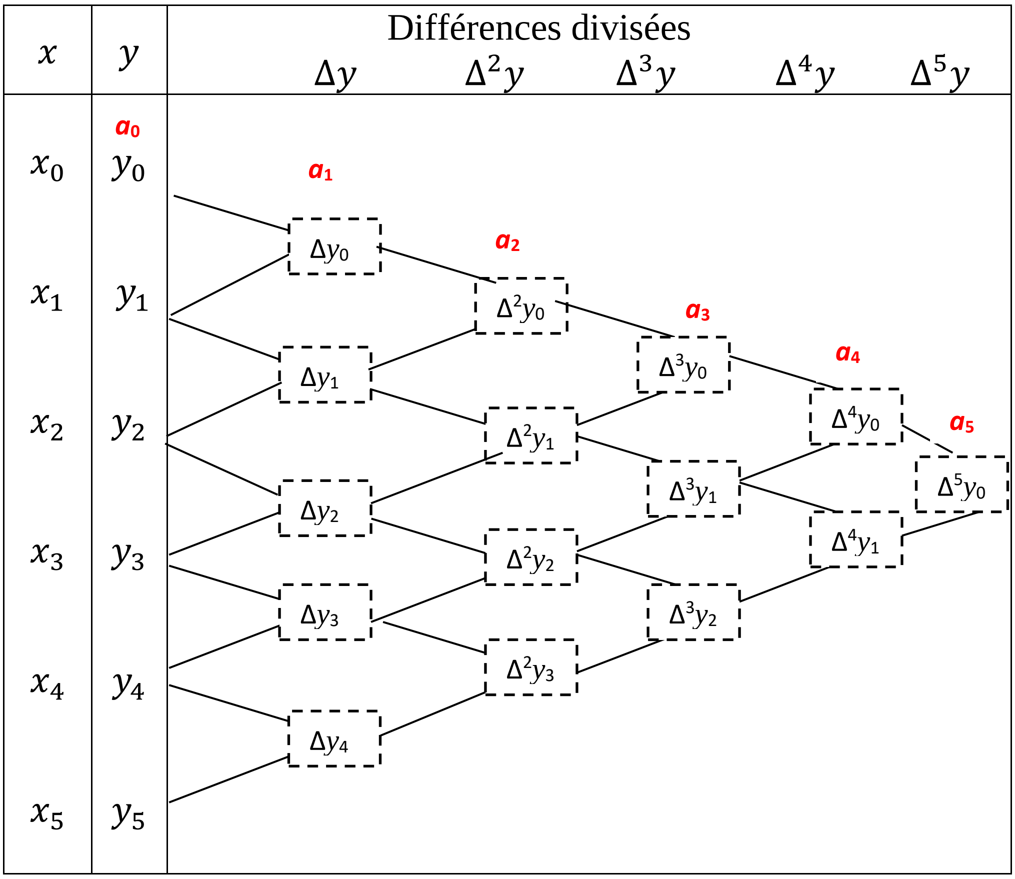
De même façon, la différence divisée d'ordre 2:

$$\Delta^2 y_i = \frac{\Delta y_{i+1} - \Delta y_i}{x_{i+2} - x_i}$$

$$\Delta^2 y_1 = \frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{x_3 - x_1}$$

2.4.2 Détermination des coefficients de P(x) dans la base de Newton

Les coefficients a_k sont donnés par le tableau suivant:



Alors le polynôme d'interpolation est donné par:

$$\boldsymbol{p_n(x) = y_0 + \Delta y_0(x - x_0) + \Delta^2 y_0(x - x_0)(x - x_1) + \ \dots\dots\dots..+}$$

$$\boldsymbol{(x - x_0)\dots\dots\dots(x - x_{n-1})\Delta^n y_0}$$

x	y	Différences divisées			
		Ordre1 Δy	Ordre2 Δ^2y	Ordre3 Δ^3y	Ordre4 Δ^4y
0	132.651				
		81.13			
0.2	148.877		15.8		
		84.87		1	
0.3	157.464		16.2		0
		89.79		1	
0.4	1.66.375		16.7		0
		95.79		1	
0.7	195.112		17.3		
		104.44			
0.9	216.000				

Exemple 1:

Les différences divisées de la fonction définie par le tableau suivant :

Exemple2 : trouver le polynôme de Newton déterminé par

n=2 (0.1), (2.5) et (4.17)

0	$f(x_0) = 1$	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
2	$f(x_1) = 5$	$\frac{1-5}{0-2} = 2$	$\frac{2-6}{0-4} = 1$
4	$f(x_1) = 17$	$\frac{5-17}{2-4} = 6$	

$$p_2(x) = y_0 + \Delta y_0 (x - x_0) + \Delta^2 y_0 (x - x_0)(x - x_1)$$

$$p_2(x) = 1 + 2x + x(x-2) = 1 + x^2$$