Solution de Série N°03

Exo 1 :

1) $y' - 2xy = (1-2x)e^{x}$, $y(0) = 5$

l'équation homogène (sans second membre) y_h est :

$y' - 2xy = 0 \Rightarrow y' = 2xy \Rightarrow \frac{y'}{y} = 2x$

$\Rightarrow \ln|y| = \int 2x\,dx = x^2 + c$

$\Rightarrow y_h = K e^{x^2}$, $K = \pm e^{c}$

solution particulière (avec second membre) est :

$y_p = K(x) e^{x^2} \Rightarrow$

$y_p' = K'(x) e^{x^2} + 2xK(x) e^{x^2}$. Alors

$K'(x)e^{x^2} + \cancel{2xK(x)e^{x^2}} - \cancel{2xK(x)e^{x^2}} = (1-2x)e^{x} \Rightarrow$

$K'(x)e^{x^2} = (1-2x)e^{x} \Rightarrow$

$K'(x) = (1-2x)e^{x-x^2} \Rightarrow$

$K(x) = \int (1-2x) e^{x-x^2}\,dx$

$= e^{x-x^2}$. donc

$y_p = e^{x-x^2} \cdot e^{x^2} = e^{x}$. Alors

la solution générale est :

$y = y_h + y_p = Ke^{x^2} + e^{x}$

* pour $y(0) = 5$:

on a : $y(0) = 5 \Rightarrow K + 1 = 5$

$\Rightarrow K = 4$. Alors

$y = 4e^{x^2} + e^{x}$

2) $y' - y\cos x = \cos x$ ... (2)

y_h solution homogène est

$y' - y\cos x = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = \cos x$

$\Rightarrow y_h = Ke^{\sin x}$, $K = \pm e^{c}$

Solution particulière y_p :

$y_p = K(x)e^{\sin x} \Rightarrow$

$y_p' = K'(x)e^{\sin x} + \cos x\, K(x) e^{\sin x}$.

remplaçons y_p et y_p' dans (2) :

$K'(x)e^{\sin x} + \cos x\,\cancel{K(x)}e^{\sin x} - \cos x\,K(x)$

$e^{\sin x} = \cos x \Rightarrow K'(x)e^{\sin x} = \cos x$.

$\Rightarrow K(x) = \int \cos x\, e^{-\sin x}\,dx$

$= -e^{-\sin x}$. donc

$y_p = -e^{-\sin x} \cdot e^{\sin x} = -1$.

$y = y_h + y_p = Ke^{\sin x} - 1$

* $y(0) = 0 \Rightarrow K - 1 = 0 \Rightarrow K = 1$

Alors $y = e^{\sin x} - 1$

3) $y' - 2xy = e^{x^2}\sin x$

$y' - 2xy = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = 2x$

$\Rightarrow \ln|y| = x^2 + c$

$\Rightarrow y_h = Ke^{x^2}$, $K = \pm e^{c}$

y_p ? :

$y_p = K(x)e^{x^2} \Rightarrow y_p' = K'(x)e^{x^2} + 2xK(x)e^{x^2}$.

$K'(x)e^{x^2} + 2x\cancel{K(x)}e^{x^2} - 2xK(x)e^{x^2} = e^{x^2}\sin x \Rightarrow$

$K'(x)\cancel{e^{x^2}} = \cancel{e^{x^2}}\sin x \Rightarrow$

$K'(x) = \sin x \Rightarrow K(x) = -\cos x$.

$y_p = -\cos x\, e^{x^2}$. Alors

$y = y_h + y_p = ke^{x^2} - \cos x\, e^{x^2}$

$* y(0) = 1 \Rightarrow k - 1 = 1 \Rightarrow k = 2$

$y = 2e^{x^2} - \cos x\, e^{x^2}$

4) $(1+x^2)y' + xy - 2x = 0 \Rightarrow$

$(1+x^2)y' + xy = 2x$

y_h ?:

$(1+x^2)y' + xy = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{x}{1+x^2}$

$\Rightarrow \ln|y| = -\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$

$\Rightarrow \ln|y| = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$

$\Rightarrow y_h = ke^{-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}$; $k = \pm e^c$

$\Rightarrow y_h = ke^{-\ln\sqrt{1+x^2}}$

$= ke^{\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} = \frac{k}{\sqrt{1+x^2}}$

y_p ?:

$y_p = k(x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow$

$y_p' = k'(x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - k(x)\frac{x}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)}$

Alors:

$(1+x^2)\left(k'(x)\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - k(x)\frac{x}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)}\right)$

$+ x k(x)\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 2x \Rightarrow$

$k'(x)\sqrt{1+x^2} - \cancel{k(x)\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} + \cancel{k(x)\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$

$= 2x \Rightarrow$

$k'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow$

$k(x) = \int\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \Rightarrow$

$k(x) = 2\sqrt{1+x^2}$. Donc

$y_p = 2\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 2.$

Alors

$y = y_h + y_p = \frac{k}{\sqrt{1+x^2}} + 2$

$* y(1) = 3 \Rightarrow k\frac{1}{\sqrt{2}} + 2 = 3$

$\Rightarrow \frac{k}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow k = \sqrt{2}$

$y = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + 2.$

Exo 2:

1) $y' + 2xy + xy^4 = 0 \Rightarrow$

$y' + 2xy = -xy^4 \Rightarrow$

$\frac{y'}{y^4} + 2x\frac{1}{y^3} = -x.$

On pose $z = \frac{1}{y^3} \Rightarrow$

$z' = -\frac{3y'}{y^4} \Rightarrow \frac{y'}{y^4} = -\frac{1}{3}z'.$

Alors:

$-\frac{1}{3}z' + 2xz = -x.$

z_h ?:

$-\frac{1}{3}z' + 2xz = 0 \Rightarrow \frac{z'}{z} = 6x.$

$\Rightarrow \ln|z| = \int 6x\,dx \Rightarrow$

$\ln|z| = 3x^2 + c \Rightarrow z_h = ke^{3x^2}$

z_p ?:

$z_p = k(x)e^{3x^2} \Rightarrow$

$z_p' = k'(x)e^{3x^2} + 6xk(x)e^{3x^2}$

$-\frac{1}{3}K'(x)e^{3x^2} - 2x\cancel{K(x)}e^{3x^2} + 2x\cancel{K(x)}e^{3x^2} = x \Rightarrow$

$-\frac{1}{3}K'(x)e^{3x^2} = -x \Rightarrow$

$K'(x) = 3xe^{-3x^2} \Rightarrow$

$K(x) = \int 3xe^{-3x^2}\,dx \Rightarrow$

$K(x) = -\frac{1}{2}e^{-3x^2}$. Dec

$z_p = -\frac{1}{2}e^{-3x^2}\cdot e^{3x^2} = -\frac{1}{2}$. Alors

$z = z_h + z_p = Ke^{3x^2} - \frac{1}{2}$

Dec: $\frac{1}{y^3} = Ke^{3x^2} - \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\frac{1}{y^3} = \frac{2Ke^{3x^2} - 1}{2} \Rightarrow$

$y^3 = \frac{2}{2Ke^{3x^2} - 1}$

2) $y' + y = y^2 \sin x \Rightarrow$

$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} = \sin x$. On pose

$z = \frac{1}{y} \Rightarrow z' = -\frac{y'}{y^2}$. Alors

$-z' + z = \sin x$

$z_h = ?$:

$-z' + z = 0 \Rightarrow \frac{z'}{z} = 1$

$\Rightarrow \ln|z| = x + c$

$\Rightarrow z_h = e^{x+c} = Ke^x, \quad K = \pm e^c$

$z_p = ?$:

$z_p = K(x)e^x \Rightarrow$

$z_p' = K'(x)e^x + K(x)e^x$. Dec

$-K'(x)e^x - \cancel{K(x)e^x} + \cancel{K(x)e^x} = \sin x$

$\Rightarrow -K'(x)e^x = \sin x$

$\Rightarrow K'(x) = -\sin x\, e^{-x}$

$\Rightarrow K(x) = \int -\sin x\, e^{-x}\,dx$ (I.P.P) $\Rightarrow$

$K(x) = \frac{e^{-x}}{2}(\sin x + \cos x)$.

Alors :

$z_p = \frac{e^{-x}}{2}(\sin x + \cos x)\cdot e^x$

$= \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$.

Dec :

$z = z_h + z_p$

$= Ke^x + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$.

Alors :

$\frac{1}{y} = Ke^x + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$

$= \frac{2Ke^x + \cos x + \sin x}{2} \Rightarrow$

$y = \frac{2}{2Ke^x + \cos x + \sin x}$

Exo 3 :

1) $y''+y'-6y=4e^{x}$, $y(0)=1$, $y'(0)=-22$

la solution homogène : y_h.

$y''+y'-6y=0$. on pose

$y_h=e^{rx} \Rightarrow y_h'=re^{rx}$ et $y_h''=r^2e^{rx}$.

Alors :

$r^2e^{rx}+re^{rx}-6e^{rx}=0 \Rightarrow$

$(r^2+r-6)e^{rx}=0 \Rightarrow r^2+r-6=0$

$\Rightarrow \Delta=1+24=25 \Rightarrow$

$r_1=\frac{-1-5}{2}=-3$, $r_2=\frac{-1+5}{2}=2$

Alors :

$y_h=c_1e^{-3x}+c_2e^{2x}$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$

la solution particulière y_p :

on recherche la solution y_p sous la forme : $y_p=ae^{x} \Rightarrow$

$y_p'=ae^{x}$, $y_p''=ae^{x}$.

$ae^{x}+ae^{x}-6ae^{x}=4e^{x} \Rightarrow$

$-4ae^{x}=4e^{x} \Rightarrow a=-1$

$\Rightarrow y_p=-e^{x}$. Alors

la solution générale est :

$y=y_h+y_p=c_1e^{-3x}+c_2e^{2x}-e^{x}$.

* on a :

$\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=-22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1+c_2-1=1 \\ -3c_1+2c_2-1=-22 \end{cases}$

$\Rightarrow c_1=5$ et $c_2=-3$

alors $y=5e^{-3x}-3e^{2x}-e^{x}$

3) $y''-2y'+2y=5\cos x$

la solution homogène associée : y_h.

$y''-2y'+2y=0 \Rightarrow$

$r^2-2r+2=0 \Rightarrow \Delta=-4<0$

$\Rightarrow r_1=\frac{2-2i}{2}=1-i$

$r_2=\frac{2+2i}{2}=1+i$. Alors

$y_h=e^{x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$

où $C_1,C_2\in\mathbb{R}$.

la solution particulière y_p sous la forme : $y_p=a_1\cos x+a_2\sin x$.

$\Rightarrow y_p'=-a_1\sin x+a_2\cos x$.

et $y_p''=-a_1\cos x-a_2\sin x$. Donc

remplaçons y_p et y_p', y_p'' dans (3) :

$-a_1\cos x-a_2\sin x+2a_1\sin x-2a_2\cos x+2a_1\cos x+2a_2\sin x=5\cos x$

$\Rightarrow a_1=1$ et $a_2=-2$.

Alors $y_p=\cos x-2\sin x$.

$y=y_h+y_p \Rightarrow$

$y=e^{x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+\cos x-2\sin x$.

* $\begin{cases} y(0)=2 \\ y'(\frac{\pi}{2})=-2(e^{\frac{\pi}{2}}-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=-2 \end{cases}$

donc $y=e^{x}(\cos x-2\sin x)+\cos x-2\sin x$.

4) $y''-8y'+15y=15x^2-16x+17$

$y''-8y'+15y=0 \Rightarrow r^2-8r+15=0$

$\Rightarrow \Delta=4 \Rightarrow r_1=3$ et $r_2=5$

Alors $y_h=c_1e^{3x}+c_2e^{5x}$

où c_1 et $c_2\in\mathbb{R}$.

y_p ?! y_p sous la forme :

$y_p=ax^2+bx+c \Rightarrow$

$y_p'=2ax+b$ et $y_p''=2a$.

remplaçons y_p, y_p' et y_p'' en (4)

$2a-16ax-8b+15ax^2+15bx$
$+15c=15x^2-16x+17 \Rightarrow$

$$\begin{cases}15a=15\\ -16a+15b=-16\\ 2a-8b+15c=17\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=1\\ b=0\\ c=1\end{cases}$$

$\Rightarrow y_p=x^2+1$

la solution générale :

$y=y_h+y_p$
$=c_1e^{3x}+c_2e^{5x}+x^2+1$

5) $y''-4y'+4y=xe^{2x}$.

$y''-4y'+4y=0 \Rightarrow r^2-4r+4=0$

$(r-2)^2=0 \Rightarrow r=2 \Rightarrow$

$y_h=(c_1+c_2x)e^{2x}$; $c_1,c_2\in\mathbb{R}$

y_p ?! y_p sous la forme $y_p=ax^3e^{2x}$

on recherche $a=\frac{1}{6} \Rightarrow$

$y_p=\frac{1}{6}x^3e^{2x}$. Alors la solution générale est $y=y_h+y_p \Rightarrow$

$y=(c_1+c_2x)e^{2x}+\frac{1}{6}x^3e^{2x}$

6) $y''-4y'+13y=10\cos 2x+25\sin 2x$.

y_h ?! $y''-4y'+13y=0$

$\Rightarrow r^2-4r+13=0 \Rightarrow \Delta=-36$

$\Rightarrow r_1=2-3i$, $r_2=2+3i$

$y_h=e^{2x}(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x)$

où $c_1, c_2\in\mathbb{R}$.

y_p ?! y_p sous la forme

$y_p=a_1\cos 2x+b_1\sin 2x$.

$y_p'=-2a_1\sin 2x+2b_1\cos 2x$

$y_p''=-4a_1\cos 2x-4b_1\sin 2x$.

$\Rightarrow$

$-4a_1\cos 2x-4b_1\sin 2x+8a_1\sin 2x$
$-8b_1\cos 2x+13a_1\cos 2x+13b_1\sin 2x=10\cos 2x+25\sin 2x$

$\Rightarrow a_1=2$ et $b_1=1$

$\Rightarrow y_p=2\cos 2x+\sin 2x$

$\Rightarrow y=y_h+y_p$
$=e^{2x}(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x)$
$+2\cos 2x+\sin 2x$.

EXO4:

$y'' - 4y' + 4y = g(x) \quad (E)$

y_h ?:

$y'' - 4y' + 4y = 0 \Rightarrow$

$r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow$

$\Delta = 0 \Rightarrow r = 2$. Alors

$y_h = (c_1 x + c_2) e^{2x}$; $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2) * Trouver y_{p_1} pour $g(x) = e^{-2x}$

y_{p_1} sous la forme $y_{p_1} = a e^{-2x}$

$\Rightarrow y'_{p_1} = -2a e^{-2x}$ et

$y''_{p_1} = 4a e^{-2x}$

remplaçons y_{p_1}, y'_{p_1} et y''_{p_1} dans (E) avec

$16 a e^{-2x} = e^{-2x} \Rightarrow a = \frac{1}{16}$

Alors : $y_p = \frac{1}{16} e^{-2x}$

* Trouver la solution y_{p_2} pour $g(x) = e^{2x}$.

y_{p_2} sous la forme :

$y_{p_2} = a x^2 e^{2x} \Rightarrow$

$y'_{p_2} = 2ax(x+1) e^{2x}$ et

$y''_{p_2} = 2a(2x^2 + 4x + 1) e^{2x}$

Remplaçons y_{p_2}, y'_{p_2} et y''_{p_2} dans (E) :

$2a e^{2x} = e^{2x} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

Alors $y_{p_2} = \frac{1}{2} x^2 e^{2x}$

3) la solution générale de (E) pour $g(x) = \frac{e^{-2x} + e^{2x}}{4}$

$y = y_h + y_p$ où

$y_p = \frac{1}{4}(y_{p_1} + y_{p_2}) \Rightarrow$

$y = (c_1 x + c_2) e^{2x} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{16} e^{-2x} + \frac{1}{2} x^2 e^{2x}\right) \Rightarrow$

$y = (c_1 x + c_2) e^{2x} + \frac{1}{64} e^{-2x} + \frac{1}{8} x^2 e^{2x}$.