Algèbre 2

Table des matières

Chapitre 1

Systèmes d'équations linéaires

1.1 Définitions et propriétés

Définition 1.1.1.
1. *On appelle équation linéaire dans les inconnues* $x_1 \dots x_p$ *toute relation de la forme*
$$a_1 x_1 + \cdots a_p x_p = b,$$
où $a_1, \dots, a_p$ *et* $b \in \mathbb{K}$.
2. *On appelle système de* n *équation linéaire à* p *inconnues à coefficients dans* $\mathbb{K}$*, tout système de la forme :*
$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p &= b_n \end{cases}$$
où les $(x_j)_{1 \le j \le p}$ *sont les inconnues et les* $(a_{ij})_{1 \le i \le n 1 \le j \le p}$, $b_j \in \mathbb{K}$.

Remarque 1.1.1. *Posons* $A = (a_{ij})_{1 \le i \le n 1 \le j \le p}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ *et* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. *Alors, le système* (S) *s'écrit sous la forme :*
$$AX + B. \tag{1.1}$$
(1.1) *est dit l'écriture matricielle du système* (S).

Exemple 1.1.1.
1. *Le système*
$$\begin{cases} 2x - 3y + z - t &= 2 \\ x + y - 5t &= 0 \\ y + t &= -1 \end{cases}$$
est un système de trois équations linéaires et de quatre inconnues. L'écriture matricielle de ce système est :
$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
2. *Le système*
$$\begin{cases} 5x^2 - 2y &= -7 \\ -2x + y &= 2 \end{cases}$$
n'est pas un système d'équations linéaires.

Définition 1.1.2. *Solution d'un système - Résoudre un système Une solution de (S) est un n-uplet d'éléments de $\mathbb{K}$ qui satisfont à la fois ses m équations. Résoudre le système (S) c'est décrire l'ensemble des solutions.*

Exemple 1.1.2. **1.** *Considérons dans $\mathbb{R}$ le système*

$$\begin{cases} 5x - 2y &= -7 \\ -2x + y &= 2 \end{cases} \tag{1.2}$$

le triplet $(-1, -2, 2)$ est une solution du système (1.2), *par contre le triplet $(0, 0, 1)$ n'est pas un solution de* (1.2). *L'ensemble des solutions du système* (1.2) *est :*

$$\left\{ \left(\frac{1 - 5z}{9}, -z, z \right) |z \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. *Le système*

$$\begin{cases} 7x - y &= -2 \\ x - y &= 4 \end{cases} \tag{1.3}$$

admet une unique solution qui est le couple $(-1, 5)$.

Dans ce qui suit, nous donnons deux différents méthodes pour résoudre les systèmes d'équations linéaires.

1.2 Résolution par la méthode de Cramer

Définition 1.2.1. *Un système d'équations linéaires (S) est dit un système de Cramer si sa matrice associé A est une matrice carrée inversible.*

Exemple 1.2.1. **1.** *Le système d'équations linéaires*

$$\begin{cases} 2x - y + 7z &= 1 \\ x + 2y + 2z &= -1 \\ x - 3y + z &= 0 \end{cases}$$

est de Cramer, car $\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = -20 \neq 0.$

2. *Le système d'équations linéaires*

$$\begin{cases} -x + 2y - z &= -2 \\ 3x - y + 8z &= -11 \\ 5x - 4y + 10z &= 1 \end{cases}$$

$$n'est\ pas\ de\ Cramer,\ car\ \det\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 8 \\ 5 & -4 & 10 \end{pmatrix} = 0.$$

Théorème 1.2.1. *Soient (S) un système de Cramer et A sa matrice associé. Notons $C_1, \ldots, C_n$ les vecteurs colonnes de A et B le vecteur colonne du second membre. (S) admet une solution unique $(x_1, \ldots, x_n)$ donnée par :*

$$x_i = \frac{\det(C_1, \cdot, C_{i-1}, B, C_{i+1}, \cdot, C_n)}{\det(A)}, \quad pour\ 1 \leq i \leq n.$$

Exemple 1.2.2. *Soit le système :*

$$(S) \begin{cases} 3x + 3y - 2z & = & 5 \\ 2y + 7z & = & 0 \\ x + y - z & = & 3 \end{cases}$$

La matrice associée est $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. *Puisque* $\det(A) = -2$, *alors* (S) *est de Cramer et sa solution unique est donnée par :*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = 15, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 7 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = 14 \quad et \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-2} = -4$$

1.3 Résolution par la méthode de Gauss

La résolution d'un système d'équations linaires par la méthode de Cramer se base sur des calculs de déterminants. Lorsque le nombre d'équations et d'inconnues est assez grand cette méthode devient moins attractive pour des raisons de temps de calcul. La méthode de Gauss qui est utile en pratique, est une alternative intéressante par rapport à celle de Cramer. Le principe de cette méthode est de transformer le système linéaire de départ en un autre, ayant les mêmes solutions, mais facile à résoudre.

La méthode de Gauss consiste à transformer un système linaire

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p & = & b_n \end{cases}$$

en un système équivalent (ayant les mêmes solutions) de la forme :

$$
(S_T)\left\{\begin{array}{ccccccccccccc}
a'_{11}y_1 & + & a'_{12}y_2 & + & a'_{13}y_3 & + & \cdots & + & a'_{1r}y_r & + & \cdots & + & a'_{1p}y_p & = & b'_1 \\
 & & a'_{22}y_2 & + & a'_{23}y_3 & + & \cdots & + & a'_{2r}y_r & + & \cdots & + & a'_{2p}y_p & = & b'_2 \\
 & & & & a'_{33}y_3 & + & \cdots & + & a'_{3r}y_r & + & \cdots & + & a'_{3p}y_p & = & b'_3 \\
\vdots & & & & & & \vdots & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & a'_{rr}y_r & + & \cdots & + & a'_{rp}y_p & = & b'_r \\
 & & & & & & & & & & & & 0y_p & = & b'_{r+1} \\
\vdots & & & & & & \vdots & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & & 0y_p & = & b'_n
\end{array}\right.
$$

Les variables $y_1, \dots, y_p$ représentent les même inconnues $x_1, \dots, x_p$ mais ordonnée autrement. L'entier $r \leq \min(n, p)$.

Le système (S) est représenté par la matrice

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} & b_n \end{pmatrix}
$$

et le système (S_T) est représenté par la matrice

$$
A_T = \begin{pmatrix}
a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1r} & \cdots & a'_{1p} & b'_1 \\
 & a'_{22} & \cdots & a'_{2r} & \cdots & a'_{2p} & b'_2 \\
\vdots & & & \vdots & & & \vdots \\
0 & \cdot & 0 & a'_{rr} & \cdots & a'_{rp} & b'_r \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b'_{r+1} \\
\vdots & & & \vdots & & & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b'_n
\end{pmatrix}
$$

Le passage du A vers A_T se repose sur le théorème suivant

Théorème 1.3.1. *Transformer un système linéaire donné par des opérations élémentaires sur les lignes ne modifie pas l'ensemble de ses solutions.*

La mise en œuvre de la méthode de Gauss peut être résumée an ces trois principales étapes.

Étape 1 : On cherche dans la première colonne $(a_{11}, \dots, a_{n1})$ le premier coefficient non nul (dans la pratique on considère celui dont la valeur absolue est la plus grande). Ce coefficient s'appelle un pivot de Gauss (on suppose que c'est a_{11}).

Étape 2 : Si ce coefficient correspond à la ligne m, alors on permute la ligne 1 et la ligne m.

Étape 3 : Avec cette transformation, on remplace les lignes $L_2, \dots, L_n$ respectivement par les lignes $L_2 - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}L_1, \dots, L_n - \dfrac{a_{n1}}{a_{11}}L_1$, sans toucher la ligne L_1.

La matrice qu'on obtient est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2p} & \beta_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{np} & \beta_n \end{pmatrix}$$

On recommence les mêmes opérations de ces étapes sur la matrice qu'on obtient en supprimant la première ligne et la première colonne. Et ainsi de suite, jusqu'à obtenir une matrice de la forme A_T.

Exemple 1.3.1. ***1.*** *Considérons le système*

$$\begin{cases} x - y + z &= 2 \\ 2x - y + 3z &= -1 \\ x + y + z &= 3. \end{cases}$$

Ce système est représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

En appliquant la méthode de Gauss, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 11 \end{pmatrix} \quad L_3 \longrightarrow L_3 - 2L_2 \ ,$$

donc le système admet une unique solution (x, y, z) *telle que* $z = -\dfrac{11}{2}$, $y = -5 + \dfrac{11}{2} = \dfrac{1}{2}$ *et* $x = 2 + \dfrac{11}{2} + \dfrac{1}{2} = 8$.

1. *Considérons le système*

$$\begin{cases} 3x + y - z &= 1 \\ x - 2y + 2z &= -2 \\ x + y - z &= 1. \end{cases}$$

Ce système est représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En appliquant la méthode de Gauss, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \longleftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \longrightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_3 \longrightarrow L_3 - \frac{2}{3}L_1 \ ,$$

donc le système admet une infinité des solutions (x, y, z) *telle que* $z = y - 1$ *et* $x = 0$.

Bibliographie

[1] C. Antonini, *Algèbre*, De Boeck, Bruxelles, 2015.

[2] E. Azoulay et J. Avignant, *Mathématiques. Tome4, Algèbre*, McGraw-Hill, Paris, 1984.

[3] T. S. Blyth and E. F. Robertson, *Basic linear Algebra*, Springer-Verlag, London, 2002.

[4] C. Dufetrelle et V. Gaggioli, *Algèbre linéaire en dimension finie*, Vuibert, Paris, 1997.

[5] R. Dupont, *Algèbre linéaire : rappels de cours et exercices*, Vuibert, Paris, 1992.

[6] J. P. Escofier, *Toute l'algèbre de la licence : cours et exercices corrigés*, Dunod, Paris, 2006.

[7] D. Étienne, *Exercices corrigés d'algèbre linéaire, Tome 1*, De Boeck, Bruxelles, 2006.

[8] S. Lipschutz, *Algèbre linéaire, Coure est problème*, McGraw-Hill Inc, New York, 1973.

[9] H. Roudier, *Algèbre linéaire, cours et exercices*, Vuibert, Paris, 2008.