Université Abdelhafid Boussouf - Mila $2022-2023$

Institut des Sciences et de la Technologie

Département des Mathématiques et informatique Algèbre 2

Série no 4 : Résolution des systèmes linéaires

Exercice 1. *Trouver la solution du système suivant :*

$$(S) \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 9x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 &= 6 \end{cases}$$

Exercice 2. *Résoudre les systèmes linaires suivants, où a est un paramètre réel donné.*

$$(S_1) \quad \begin{cases} x - ay + a^2 z &= a \\ ax - a^2 y + az &= 1 \\ ax + y - a^3 z &= 1 \end{cases}$$

$$(S_2) \quad \begin{cases} ax + y + z &= a^2 \\ x + ay + z &= a \\ x + y + az &= 1 \end{cases}$$

$$(S_3) \quad \begin{cases} ax &= 0 \\ x + my - z + t &= 1 \\ x - y + az - t &= 2 \\ x + y - z &= 3 \end{cases}$$

Exercice 3. *Soient a, b, c, α, β des réels et (S) le système linéaire, d'inconnues x, y, z, t, donné par :*

$$(S) \quad \begin{cases} x + y + z + t &= a \\ x - y - 2z + 2t &= b \\ 2x + y + \alpha z + \beta t &= c. \end{cases}$$

1. *Donner l'écriture matricielle du système (S).*

2. *Soient*

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & \alpha \end{vmatrix}, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & \beta \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & \alpha & \beta \end{vmatrix}.$$

Calculer δ_1, δ_2 et δ_3.

3. *En déduire le rang de (S) suivant les valeurs de α et β.*

4. *On suppose que $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $\beta = \dfrac{5}{2}$.*

a. *Calculer $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$. En déduire le rang de (S).*

b. *Calculer* $\delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & b \\ 2 & 1 & c \end{vmatrix}$.

c. *Quelle relation doivent satisfaire* a, b, c *pour que* (S) *soit compatible.*

5. *On suppose que* $a = b = 1$, $c = 2$, $\alpha = \dfrac{1}{2}$ *et* $\beta = \dfrac{5}{2}$. *Résoudre le système* (S).

Exercice 4. *Soit* m *un réel et* (S_m) *le système linéaire, d'inconnues* x, y, z, *donné par :*

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = 1 \\ x + y + z = m \end{cases}$$

Résoudre le système (S_m) *en utilisant la méthode de Gauss.*