Mathématique 02
TD 03

Exercice 1. Calculer les primitives suivantes :

① $\displaystyle\int x(1-x^2)^3\,\mathrm{d}x$ ③ $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ ⑤ $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x.$

② $\displaystyle\int x\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$ ④ $\displaystyle\int xe^{-3x^2+7}\,\mathrm{d}x$

Exercice 2. Par la méthode de changement de variables, trouver les primitives puis conclu les intégrales définies suivantes.

① $\displaystyle\int \sqrt{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x, \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x.$

② $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

Exercice 3. Par l'intégration par parties trouver les intégrales suivantes.

① $\displaystyle\int x\sin x\,\mathrm{d}x.$

② $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x.$

Exercice 4. Calculer les intégrales suivants :

① $\displaystyle I=\int_{-3}^{1} |x+1|\,\mathrm{d}x.$ ③ $\displaystyle K=\int_{2}^{0} \sqrt{|x-1|}\,\mathrm{d}x.$

② $\displaystyle J=\int_{0}^{3} |x^2-3x+2|\,\mathrm{d}x.$

Exercice 5. Soit f une fonction réelle et $a\in\mathbb{R}$. Montrer que

① Si f est impaire $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x=0.$

② Si f est paire $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Formulaire : Dérivées et primitives usuelles

Dans tout le formulaire, les quantitées situées au dénominateur sont supposées non nulles

Dérivées des fonctions usuelles

Dans chaque ligne, f' est la dérivée de la fonction f sur l'intervalle I.

$f(x)$	I	$f'(x)$
λ (constante)	$\mathbb{R}$	0
x	$\mathbb{R}$	1
x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$]0, +\infty[$	$\frac{1}{x}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\tan x$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Opérations et dérivées

$(f+g)' = f' + g'$

$(\lambda f)' = \lambda f'$, λ désignant une constante

$(fg)' = f'g + fg'$

$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$

$\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$\boxed{(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2)$

$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{nu'}{u^{n+1}} \quad (n \in N,\ n \geqslant 1)$

$(e^u)' = u'e^u$

$(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$

En particulier,si $u > 0$: $\forall a \in \mathbb{R}$, $\boxed{(u^a)' = \alpha u' u^{a-1}}$

Primitives des fonctions usuelles

Dans chaque ligne, F est **une** primitive de f sur l'intervalle I. Ces primitives sont **uniques à une constante près** notée C.

$f(x)$	I	$F(x)$
λ (constante)	$\mathbb{R}$	$\lambda x + C$
x	$\mathbb{R}$	$\frac{x^2}{2} + C$
x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$\ln|x| + C$
$\frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$-\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	$2\sqrt{x} + C$
$\ln x$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \ln x - x + C$
e^x	$\mathbb{R}$	$e^x + C$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sin x + C$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[, \quad k \in \mathbb{Z}$	$\tan x + C$

Opérations et primitives

On suppose que u est une fonction dérivable sur un intervalle I

- Une primitive de $u'u^n$ sur I est $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$
- Une primitive de $\frac{u'}{u^2}$ sur I est $-\frac{1}{u}$.
- Une primitive de $\frac{u'}{u^n}$ sur I est $-\frac{1}{(n-1)\,u^{n-1}}$.$(n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$.
- Une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ sur I est $2\sqrt{u}$ (En supposant $u > 0$ sur I.)
- Une primitive de $\frac{u'}{u}$ sur I est $\ln|u|$.
- Une primitive de $u'e^u$ sur I est e^u.

En particulier, si $u > 0$ sur I et si $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, une primitive de $u'u^a$ sur I est :

$$\boxed{\int u'u^a = \begin{cases} \frac{1}{a+1}u^{a+1} + C & \text{si } a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ \ln u \ + C & \text{si } a = -1 \end{cases}}$$