Centre Universitaire de Mila — 2022/2023
Département de ST — L1-S2

Mathématique 02
TD 01

Exercice 1. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \\ 3 & -2 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Pour chacune de ces matrices, décrire l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ associée : images des vecteurs de la base canonique, image d'un vecteur quelconque.

(b) Peut-on former les produits ABC, CBA, BAC ? Si oui, les calculer de deux manières pour vérifier, sur ce cas particulier, l'associativité du produit de matrices.

Exercice 2. Trouver les matrices carrées d'ordre 2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

telles que

(a) $A^2 = A$.

(b) $A^2 = I_2$.

(c) $AB = BA$, avec $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Soit a un nombre réel non nul et soit

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Calculer A^n pour tout n de $\mathbb{Z}$.

Exercice 4. Calculer les inverses des matrices suivantes.

(a) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 11 & 1 \\ 2 & 9 & -11 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 4 & -10 \end{pmatrix}.$$

ⓑ On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que A vérifie la relation $A^3 - 2A^2 - 5A - 24I_3 = 0$. En déduire l'inverse de A.

Exercice 5. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n antisymétrique, c'est-à-dire telle que $a_{ij} = -a_{ji}$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

ⓐ Calculer Dét (A) pour n = 2,3,4.

ⓑ Montrer que Dét (A) = 0 si n est impair.

Exercice 6. Soit A une matrice carrée d'ordre n. On note C la comatrice de A. Exprimer Dét (C) en fonction de Dét (A).