Université Abderrahmane Mira de Béjaia

Faculté de Technologie

Département de Technologie

Analyse et Algèbre

Cours, $1^{ère}$ année LMD

Arezki KHELOUFI[1].

[1]version 1.0 kheloufi_arezki@hotmail.com pour toute remarque

Table des matières

Introduction

Ce cours d'Analyse et Algèbre est destiné surtout aux étudiants du domaines Sciences et Techniques (dans le cadre du système L.M.D.). Il couvre le programme officiel des modules Maths 1 et Maths 2. La première partie est consacrée au programme du semestre 1 du module Analyse et Algèbre 1 (ou Maths 1), à savoir :
1. Eléments de la logique mathématique.
2. Ensembles, relations et applications.
3. Structures algébriques fondamentales.
4. Suites numériques.
5. Fonctions réelles d'une variable réelle.
6. Formules de Taylor et développements limitées.
7. Espaces vectoriels et applications linéaires.

La seconde partie est consacrée au programme du semestre 2 du module Analyse et Algèbre 2 (ou Maths 2). Elle comporte les chapitres suivants :
8. Matrices et déterminants.
9. Systèmes d'équations linéaires et diagonalisation.
10. Intégrales et calculs des primitives.
11. Equations différentielles.
12. Fonctions de plusieurs variables.

Le contenu du cours est inspiré des manuels de mathématiques couramment utilisés, ainsi que du cours que j'ai enseigné de 2007 à 2013 pour les étudiants de première année L.M.D. du domaine S.T. au sein du Département de Technologie de la Faculté de Technologie.

J'espère que ce support aidera l'étudiant de première année à assimiler les mathématiques et plus particulièrement l'Analyse et Algèbre I et II qui constituent la base des mathématiques à l'université.

Enfin, des erreurs peuvent être relevées, prière de les signaler à l'auteur.

Première partie

Analyse et Algèbre I

Chapitre 1

Eléments de la logique mathématique

Dans ce chapitre, on présentera les notions élémentaires de la logique mathématique et les différents modes de raisonnement.

1.1 Notions de logique

Définition : Une proposition est un énoncé qui est soit vrai, soit faux. Les propositions sont distinguées par des lettres majuscules : P, Q, R, ...

Exemples :

a) "15 est plus grand que 10" est une proposition vraie.

b) "Trois est un nombre pair" est une proposition fausse.

c) "Le nombre x est impair" n'est pas une proposition puisqu'il est impossible de décider si elle est vraie ou fausse tant que l'on connait pas x.

1.1.1 Opérations sur les propositions, connecteurs logiques

a) Négation : La négation d'une proposition P notée (non P) ou $\overline{P}$ est une proposition vraie lorsque P est fausse et fausse lorsque P est vraie.

b) Disjonction : La disjonction de deux propositions P et Q, not ée (P ou Q) oubien $(P \vee Q)$ est une proposition vraie si l'une au moins des propositions P, Q est vraie.

Remarque : $\left(P \vee \overline{P}\right)$ est toujours vraie.

c) Conjonction : La conjonction des propositions P et Q, noté e P et Q $(P \wedge Q)$ est une proposition qui n'est vraie que si P, Q sont toutes les deux vraies.

Remarque : $\left(P \wedge \overline{P}\right)$ est toujours fausse.

d) Implication : La proposition (non P ou Q) est appelée implication logique et on la note $P \Longrightarrow Q$: se lit P implique Q.

e) Equivalence : Deux propositions P, Q sont équivalentes si $P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow P$ et on écrit $P \Longleftrightarrow Q$: se lit P est équivalente à Q.

Toutes les définitions précédentes peuvent être résumées dans la table ci-dessous dite table de vérité

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow P$	$P \Longleftrightarrow Q$
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1

Remarques : 1) On remarque de cette table qu'une proposition vraie n'implique pas une proposition fausse.

2) Deux propositions sont équivalentes si et seulement si elles ont la m ême valeur de vérité.

Exemples :

P :" $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel" est une proposition fausse.

$\overline{P}$:" $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel" est une proposition vraie.

$3 > 5$ ou $1 + 1 = 3$ est une proposition fausse.

$3 > 5$ ou $1 + 1 = 2$ est une proposition vraie.

$2 = 2$ et $2 = 1 + 1$ est une proposition vraie.

$2 < 1$ et $2 = 2 + 0$ est une proposition fausse.

$3 + 2 = 4 \Longrightarrow 3 \times 2 = 5$ est une proposition vraie.

$3 + 2 = 5 \Longrightarrow 3 \times 2 = 5$ est une proposition fausse.

$3 + 2 = 5 \Longrightarrow 3 \times 2 = 6$ est une proposition vraie.

$3 + 2 = 4 \Longleftrightarrow 3 \times 2 = 5$ est une proposition vraie.

1.1.2 Propriétés

1) $P \Longleftrightarrow \overline{\overline{P}}$.
2) $\overline{P \wedge Q} \Longleftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$.
3) $\overline{P \vee Q} \Longleftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$.
4) $P \Longrightarrow Q \Longleftrightarrow \overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$.
5) $[P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow R] \Longrightarrow P \Longrightarrow R$.
6) $(P \vee Q) \vee R \Longleftrightarrow P \vee (Q \vee R)$.
$(P \wedge Q) \wedge R \Longleftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$.
7) $(P \vee Q) \wedge R \Longleftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$.
$(P \wedge Q) \vee R \Longleftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$.
8) $\left.\begin{array}{l} P \Longrightarrow Q \text{ est vraie} \\ \overline{P} \Longrightarrow Q \text{ est vraie} \end{array}\right\} \Longrightarrow Q$ est vraie.

1.1.3 Les quantificateurs

a) Quantificateur universel : noté $\forall$, se lit "quel que soit" ou "pour tout".
b) Quantificateur existentiel : noté $\exists$, se lit "il existe au moins".
Exemples :
1. P : "$\forall x, x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 > 0$".
Pour tout élément de $\mathbb{R}$ (ensemble des nombrse réels), l'inégalité est vraie.
2. Q : "$\exists x, x \in \mathbb{R},\ 2x + 1 \leq 0$".
Il existe au moins un élément x de $\mathbb{R}$, pour lequel l'inégalité précédente est vraie.
c) Propriétés :
1) $\overline{[\forall x, P(x)]} \Longleftrightarrow \exists x, \overline{P(x)}$.
2) $\overline{[\exists x, P(x)]} \Longleftrightarrow \forall x, \overline{P(x)}$.
3) $[\forall x, (P(x) \text{ et } Q(x))] \Longleftrightarrow [\forall x, P(x)]$ et $[\forall x, Q(x)]$.
4) $[\exists x, (P(x) \text{ et } Q(x))] \Longrightarrow [\exists x, P(x)]$ et $[\exists x, Q(x)]$.
5) $[\forall x, (P(x) \text{ ou } Q(x))] \Longrightarrow [\forall x, P(x)]$ ou $[\forall x, Q(x)]$.
Remarque : La réciproque dans 4) et 5) n'est pas toujours vraie.
Exemple : $P(x) : x \geq 2 \quad \exists x, x = 3$ tel que $P(x)$ est vraie,
$Q(x) : x < 2 \quad \exists x, x = 1$ tel que $Q(x)$ est vraie,
mais ceci n'implique pas l'existence d'un x tel que $P(x)$ et $Q(x)$ sont vraies à la fois.
Remarque importante :
Les relations "$\forall x, \exists y, P(x, y)$" et "$\exists y, \forall x, P(x, y)$" sont différentes car dans la premiè re y dépend de x alors que dans la seconde y ne dépend pas de x.
Cependant :

$$\forall x, \forall y, P(x, y) \Longleftrightarrow \forall y, \forall x, P(x, y)$$

et

$$\exists x, \exists y, P(x, y) \Longleftrightarrow \exists y, \exists x, P(x, y).$$

Exemple $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : x^2 < y$ est vraie.
$\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N} : x^2 < y$ est fausse.

1.2 Méthodes de raisonnement mathématique

Il existe plusieurs types de raisonnement mathématique, on va traiter dans cette partie les plus utilisés

1.2.1 Raisonnement par l'asurde :

Pour démontrer qu'une proposition P est vraie, on suppose qu'elle est fausse et on aboutit à une contradiction.
Exemple : Montrer que $\forall x \in \mathbb{N},\ x + 1 \neq 0$.
On suppose que P est fausse : $\exists x \in \mathbb{N},\ x + 1 = 0$ donc $x = -1$ et $x \in \mathbb{N}$. Contradiction avec la définition de $\mathbb{N}$.

1.2.2 Démonstration par la contraposée :

Si l'implication $P \Longrightarrow Q$ s'avère difficile à dé montrer alors compte tenu de l'équivalence $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P})$, donc il revient au même de démontrer que $\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$.

1.2.3 Démonstration par un contre exemple :

Pour démontrer que la proposition $(\forall x \in X, P(x))$ est fausse, il suffit de trouver un x_0 de X tel que $\overline{P(x_0)}$ est vraie.

Exemple :

$$P : \text{"}\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 \neq 0\text{"}.$$

On a pour $x_0 = 1$, $1 - 1 = 0$ et $\overline{P}$ est vraie. Donc P est fausse.

1.2.4 Démonstration par récurrence :

Soit P une proposition dépendant de l'entier naturel n, s'il existe un entier naturel $n_0 \geq 0$ pour lequel $P(n_0)$ est vraie et que pour tout $n \geq n_0$ $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ est vraie, alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exemple 1 :

Montrer que

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Pour $n = 1$,

$$1 = \frac{1(1+1)}{2},$$

donc $P(1)$ est vraie. On suppose que $P(n)$ est vraie, c'est à dire

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

et on montre que $P(n+1)$ est vraie, c'est à dire

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Donc $P(n)$ est vraie $\forall n \geq 1$.

Exemple 2 :

Montrons que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k \in \mathbb{N} : 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} = 17k.$$

On raisonne par récurrence.

Pour $n = 1$, On a

$$3 \times 5^{2-1} + 2^{3-2} = 17 = 17 \times 1,$$

Donc

$$\exists k = 1 \in \mathbb{N} : 3 \times 5^{2-1} + 2^{3-2} = 17k.$$

On suppose que

$$\exists k \in \mathbb{N} : 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} = 17k$$

et montrons que

$$\exists k' \in \mathbb{N} : 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} = 17k'.$$

On a

$$\begin{aligned} 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} &= 3 \times 25 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} \times 8 \\ &= 8\left(3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}\right) + 17 \times 3 \times 5^{2n-1} \\ &= 8 \times 17k + 17 \times k'' \\ &= 17k' \text{ avec } k' = (8k + k'') \end{aligned}$$

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}^*, 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17.

Exemple 3 : Exercice

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > -1$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$
2. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* .$$

Chapitre 2

Ensembles, relations et applications

2.1 Notions sur la théorie des ensembles

2.1.1 Définitions

Définition 2.1 *Un ensemble est une collection d'objets qui ont la même propriété. Chaque objet est un élément de l'ensemble.*

Remarque 2.1 *un élément x est distinct de l'ensemble $\{x\}$ c'est à dire $x \neq \{x\}$.*

Exemple 2.1 *Soit E l'ensemble des entiers qui divisent 20, $E = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$.*

Appartenance, inclusion et égalité

Soit E un ensemble.

a) Si x est un élément de E on dit aussi que x appartient à E et on écrit $x \in E$. Si x n'est pas un élément de E, on dit que x n'appartient pas à E et on écrit $x \notin E$.

b) Un ensemble E est inclus dans un ensemble F si tout élément de E est un élément de F et on a

$$E \subset F \Longleftrightarrow [\forall x, x \in E \Longrightarrow x \in F].$$

On dit aussi que E est une partie de F ou bien E est un sous ensemble de F.

c) E et F sont égaux si E est inclus dans F et F est inclus dans E et on écrit

$$E = F \Longleftrightarrow E \subset F \text{ et } F \subset E \Longleftrightarrow [\forall x, x \in E \Longleftrightarrow x \in F].$$

L'ensemble vide noté $\emptyset$ est un ensemble sans éléments et de plus il est inclus dans tout ensemble E.

Réunion et intersection

a) L'intersection de deux ensembles E et F est l'ensemble de leurs éléments communs et on écrit

$$E \cap F = \{x/x \in E \text{ et } x \in F\}.$$

Et si $E \cap F = \emptyset$, on dit que E et F sont disjoints.

b) La réunion de deux ensembles E et F est l'ensemble de leurs éléments comptés une seule fois et on écrit

$$E \cup F = \{x/x \in E \text{ ou } x \in F\}.$$

Différence de deux ensembles

On appelle différence de deux ensembles E et F et on note $E - F$ l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à F et on écrit

$$E - F = \{x/x \in E \text{ et } x \notin F\}.$$

Si $F \subset E$, alors $E - F$ est dit complémentaire de F dans E et il est noté C_E^F ou $\overline{F}$ ou $C_E F$. On note $\emptyset = E - E$.

Difféence symétrique

On appelle différence symétrique de deux ensembles E et F et on note $E \Delta F$ l'ensemble défini par

$$E \Delta F = (E - F) \cup (F - E).$$

2.1.2 Propriétés

Soient E, F et G trois ensembles, alors les relations suivantes sont vraies
1. $E \cap F = F \cap E$ et $E \cup F = F \cup E$.
2. $(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$ et $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$.
3. $(E \cap F) \cup G = (E \cup G) \cap (F \cup G)$ et $(E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (F \cap G)$.
4. $E - (F \cap G) = (E - F) \cup (E - G)$ et $E - (F \cup G) = (E - F) \cap (E - G)$.
5. Si $F \subset E$ et $G \subset E$, alors $C_E^{F \cap G} = C_E^F \cup C_E^G$ et $C_E^{F \cup G} = C_E^F \cap C_E^G$.
6. $E \cap \emptyset = \emptyset$ et $E \cup \emptyset = E$.
7. $E \cap (F \Delta G) = (E \cap F) \Delta (E \cap G)$.
8. $E \Delta \emptyset = E$ et $E \Delta E = \emptyset$.

2.1.3 L'ensemble des parties d'un ensemble

Etant donné un ensemble E. On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E et on note

$$\mathcal{P}(E) = \{X / X \subset E\}.$$

Remarque 2.2 *a) L'ensemble vide et E sont des éléments de $\mathcal{P}(E)$.*
b) Soit $E = \{a, b, c\}$, donc $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

2.1.4 Partition d'un ensemble

Soit E un ensemble et A une famille des parties de E. On dit que A est une partition de E si
1) Tout élément de A n'est pas vide.
2) Les éléments de A sont deux à deux disjoints.
3) La réunion des éléments de A est égale à E.

Exemple 2.2 *$E = \{a, b\}$, $A = \{\{a\}, \{b\}\}$ est une partition de E.*

2.1.5 Produit cartésien

Définition 2.2 *L'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in E$ et $y \in F$ est appelé produit cartésien de E et F et on le note $E \times F$*

$$E \times F = \{(x, y) \,/\, x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Propriétés :
1.$E \times F = \emptyset \Longrightarrow E = \emptyset$ ou $F = \emptyset$.
2. $E \times F = F \times E \Longleftrightarrow E = \emptyset$ ou $F = \emptyset$ ou $E = F$.
3. $E \times (F \cup G) = (E \times F) \cup (E \times G)$.
4. $(E \cup G) \times F = (E \times F) \cup (G \times F)$.
5. $(E \times F) \cap (G \times H) = (E \cap G) \times (F \cap H)$.
6. $(E \times F) \cup (G \times H) \neq (E \cup G) \times (F \cup H)$.

Exemple 2.3 *$E = F = \{0\}$, $G = H = \{1\}$ donc $E \cup G = \{0, 1\}$ et $F \cup H = \{0, 1\}$. On a $E \times F = \{(0, 0)\}$, $G \times H = \{(1, 1)\}$ et $(E \cup G) \times (F \cup H) = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$.*

2.2 Relations binaires dans un ensemble

2.2.1 Définition et Propriétés

Définition 2.3 *Soient E un ensemble, x et y deux éléments de E. S'il existe un lien qui relie x et y on dit qu'ils sont reliés par une relation $\Re$ et on écrit $x \Re y$ ou $\Re(x, y)$.*

Exemple 2.4 *$E = \mathbb{R}$, $\forall x, y \in E$, $x \Re y \Longleftrightarrow |x| - |y| = x - y$.*

Propriétés

a) Réflexivité : On dit que $\Re$ est réflexive dans E si : $\forall x E$, $x \Re x$.
b) Symétrie : On dit que $\Re$ est symétrique dans E si : $\forall x, y \in E$, $x \Re y \Longrightarrow y \Re x$.
c) Antisymétrie : On dit que $\Re$ est antisymétrique dans E si : $\forall x, y \in E$, $x \Re y$ et $y \Re x \Longrightarrow x = y$.
d) Transitivité : On dit que $\Re$ est transitive dans E si : $\forall x, y, z \in E$, $x \Re y$ et $y \Re z \Longrightarrow x \Re z$.

2.2.2 Relation d'équivalence

On dit que $\Re$ est une relation d'équivalence sur E si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Classe d'équivalence

Soit $\Re$ une relation d'équivalence sur E, $a \in E$. On appelle classe d'équivalence de a notée $\overline{a}, \dot{a}$ ou $cl\ a$, l'ensemble des éléments y de E qui sont en relation $\Re$ avec a. C'est à dire

$$\overline{a} = \{y \in E, y\Re a\}.$$

Ensemble quotient

Soit $\Re$ une relation d'équivalence sur E. On définit l'ensemble quotient de E par la relation $\Re$ l'ensemble des classes d'équivalence de tous les éléments de E, noté et on a

$$E/\Re = \{\overline{a}, a \in E\}.$$

Propriétés

Soit E un ensemble et $\Re$ une relation d'équivalence dans E. Soit x un élément de E, alors

1. $x \in \overline{x}$.
2. $\forall x, y \in E\ x\Re y \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{y}$.
3. $\forall x, y \in E, \overline{x} \neq \overline{y} \Leftrightarrow \overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$ et $E = \cup_{x\in E}\overline{x}$

Exemple 2.5 *Dans $\mathbb{R}$, On définit la relation binaire $\Re$ par*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\ x\Re y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$

1. Montrer que $\Re$ une relation d'équivalence.
2. Préciser la classe de a pour tout a de $\mathbb{R}$.

1)Montrons que $\Re$ une relation d'équivalence

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x^2 = x - x = 0 \Longrightarrow x\Re x \Longrightarrow \Re$ est réflexive.

b) $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x\Re y &\Longleftrightarrow x^2 - y^2 = x - y \\ &\Longleftrightarrow -\left(y^2 - x^2\right) = -(y - x) \\ &\Longleftrightarrow y^2 - x^2 = y - x \\ &\Longleftrightarrow y\Re x. \end{aligned}$$

Donc $\Re$ est symétrique.

c) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$$x\Re y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 = x - y \tag{2.1}$$

et

$$y\Re z \Longleftrightarrow y^2 - z^2 = y - z. \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} (2.1) + (2.2) &\Longleftrightarrow x^2 - y^2 + y^2 - z^2 = x - y + y - z \\ &\Longleftrightarrow x^2 - z^2 = x - z \\ &\Longleftrightarrow x\Re z. \end{aligned}$$

Donc $\Re$ est transitive.

De a), b) et c), on a bien $\Re$ une relation d'équivalence.

2) Soit $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \overline{a} &= \{x \in \mathbb{R}, x\Re a\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}, x^2 - y^2 = x - y\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, (x - a)(x + a) = x - a\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, (x - a)(x + a - 1) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, x = a \text{ ou } x = 1 - a\} \\ &= \{a, 1 - a\}. \end{aligned}$$

2.2.3 Relation d'ordre

Une relation binaire $\Re$ dans un ensemble E est dite relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Ordre partiel, ordre total

Soient E un ensemble et $\Re$ une relation d'ordre dans E. On dit que $\Re$ est d'ordre total si

$$\forall x, y \in E, x\Re y \text{ ou } y\Re x.$$

Et on dit qu'elle est d'ordre partiel si elle n'est pas d'ordre total, c'est à dire :

$$\exists x, y \in E, x\Re y \text{ et } y\Re x.$$

Exemple 2.6 *Soit $E = \{a, b, c\}$, on note par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Dans $P(E)$, on définit la relation binaire $\Re$ par*

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \;\; A\Re B \Longleftrightarrow A \subset B.$$

1. *Montrer que $\Re$ est une relation d'ordre.*
2. *Cet ordre est-il total ?*

1) Montrons que $\Re$ est une relation d'ordre
a) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, alors il est clair que $A \subset A$, donc $A\Re A$, c'est àdire que $\Re$ est réflexive.
b) Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$,

$$\begin{aligned} A\Re B \text{ et } B\Re A &\Longleftrightarrow A \subset B \text{ et } B \subset A \\ &\Longleftrightarrow A = B. \end{aligned}$$

Donc $\Re$ est antisymétrique.
c) Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$,

$$\begin{aligned} A\Re B \text{ et } B\Re C &\Longleftrightarrow A \subset B \text{ et } B \subset C \\ &\Longleftrightarrow A\Re C. \end{aligned}$$

Donc $\Re$ est transitive.
De a), b) et c) on a bien $\Re$ est une relation d'ordre.
2) On a $E = \{a, b, c\}$, donc $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$. L'ordre de la relation est partiel car $\exists A = \{a\} \in \mathcal{P}(E), \exists B = \{b\} \in \mathcal{P}(E) : A \not\subseteq B$ et $B \not\subseteq A$.

2.3 Applications, fonctions

2.3.1 Définitions

Soient E, F deux ensembles.
1. On appelle fonction de l'ensemble E vers l'ensemble F une relation de E vers F dont à tout élément x de E on lui correspond au plus un élément y de F. x est dit antécédant, E l'ensemble de départ ou des antécédants, y est appelé l'image, F l'ensemble d'arrivée ou des images.
2. On appelle application de E dans F une relation de E dans Fdont à tout élément x de E on lui correspond un et un seul élément y de F.
3. Deux applications sont égales si leurs ensembles de départ sont égaux, leurs ensembles d'arrivée sont égaux et leurs valeurs également.

En général, on schématise une fonction ou une application f par

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & y = f(x). \end{array}$$

$\Gamma = \{(x, f(x)), x \in E\}$ est appelé graphe de f.

Exemple 2.7

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x}{x-1} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} - \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x}{x-1}. \end{array}$$

Dans cet exemple g est une application mais f est une fonction et n'est pas une application car l'élément 1 n'a pas une image dans $\mathbb{R}$.

2.3.2 Restriction et prolongement d'une application

Soit E' un sous ensemble de E et $f : E \longrightarrow F$ une application. L'application $g : E' \longrightarrow F$ telle que $\forall x \in E', g(x) = f(x)$ est appelée la restriction de f à E' et on écrit $g = f_{/E'}$ et on dit aussi que f est le prolongement de g à E.

2.3.3 Composition des applications

Soient E, F et G trois ensembles et et $f : E \longrightarrow F, g : F \longrightarrow G$ deux applications. On définit l'application composée de f et g notée $g \circ f$ par $\forall x \in E, (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

2.3.4 Injection, surjection et bijection

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

a) On dit que f est injective si $\forall x, x' \in E\ f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$ ou d'une manière équivalente $\forall x, x' \in E$ $x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$.

b) On dit que f est surjective si $\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x)$.

c) On dit que f est bijective si f est injective et surjective.

Propriétés

a) f est injective $\Longleftrightarrow$ l'équation $y = f(x)$ admet au plus une solution.

a) f est surjective $\Longleftrightarrow$ l'équation $y = f(x)$ admet au moins une solution.

a) f est bijective $\Longleftrightarrow$ l'équation $y = f(x)$ admet une et une seule solution.

Proposition 2.1 *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications, alors on a*

1) $g \circ f$ est injective $\Longrightarrow f$ est injective.

2) $g \circ f$ est surjective $\Longrightarrow g$ est surjective.

3) $g \circ f$ est bijective $\Longrightarrow f$ est injective et g est surjective.

Preuve : 1) On suppose que $g \circ f$ est injective et on montre que f est injective. Soient $x, x' \in E : f(x) = f(x')$ qui est dans F. On compose par g aux deux membres de l'égalité, on obtient

$$\begin{aligned} g(f(x)) = g(f(x')) &\Longrightarrow (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \\ &\Longrightarrow x = x' \text{ car } g \circ f \text{ est injective.} \end{aligned}$$

Ce qui montre que f est injective.

2) On suppose que $g \circ f$ est surjective et on montre que f est surjective.

$$\begin{aligned} g \circ f \text{ surjective} &\Longrightarrow \forall z \in G, \exists x \in E : z = (g \circ f)(x) \\ &\Longrightarrow \exists x \in E : z = g(f(x)). \end{aligned}$$

En posant $y = f(x) \in F$ alors $\forall z \in G, \exists y \in F : z = g(y)$, ce qui montre que g est surjective.

3) $g \circ f$ est bijective $\Longleftrightarrow \begin{cases} g \circ f \text{ est injective} \\ g \circ f \text{ est surjective} \end{cases} \Longrightarrow f$ est injective et g est surjective.

2.3.5 Applications réciproques

Définition 2.4 *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application bijective, alors il existe une application notée f^{-1} définie par $f^{-1} : F \longrightarrow E$*

$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y),$$

appelée application réciproque de f.

Théorème 2.1 *Théorème : Soit $f : E \longrightarrow F$ une application bijective, alors son application réciproque f^{-1} vérifie $f \circ f^{-1} = Id_F$ et $f^{-1} \circ f = Id_E$. On rappelle*

$$\begin{array}{rccl} Id_E : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & Id_E(x) = x. \end{array}$$

Proposition 2.2 *Proposition : Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications, alors on a*

a) f et g sont injectives $\Longrightarrow g \circ f$ est injective.

b) f et g sont surjectives $\Longrightarrow g \circ f$ est surjective.

c) f et g sont bijectives $\Longrightarrow g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Preuve : a) On suppose que f et g sont injectives et on montre que $g \circ f$ est injective. Soient $x, x' \in E$, alors on a

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') &\Longrightarrow g[f(x)] = g[f(x')] \\ &\Longrightarrow f(x) = f(x') \text{ car } g \text{ est injective} \\ &\Longrightarrow x = x' \text{ car } f \text{ est injective.} \end{aligned}$$

Ce qui montre que l'application $g \circ f$ est injective.

b) On suppose que f et g sont surjectives et on montre que $g \circ f$ l'est aussi.

Soit $z \in G \Longrightarrow \exists y \in F : z = g(y)$ car g est surjective

$y \in F \Longrightarrow \exists x \in E : y = f(x)$ car f est surjective.

Donc, on obtient $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$. Ce qui montre que l'application $g \circ f$ est surjective.

c) On suppose que f et g sont bijjectives, donc f et g sont surjectives et f et g sont injectives. D'après a) et b) on déduit que $g \circ f$ est injective et est surjective, c'est à dire $g \circ f$ est bijective.

Remarque 2.3 *1. Les graphes d'une application bijective f et de son inverse f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.*

2. Notons que si f est bijective alors f^{-1} est aussi bijective et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

2.3.6 Image directe, image réciproque :

a) Image directe : Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et A un sous-ensemble de E. On définit l'image directe de A par l'application f le sous-ensemble de F noté $f(A)$:

$$f(A) = \{y \in F, \exists x \in A, y = f(x)\} = \{f(x), x \in A\}.$$

Exemple 2.8 *Soit*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

et $A = [-2, 1]$*. On a*

$$\begin{aligned} f(A) &= \{f(x), x \in A\} \\ &= \left\{x^2, x \in [-2, 1]\right\} \\ &= [0, 4]. \end{aligned}$$

a) Image réciproque : Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et B un sous-ensemble de F. On définit l'image réciproque de B par l'application f le sous-ensemble de E noté $f^{-1}(B)$:

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}.$$

Exemple 2.9 *Soit*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

et $B = [0, 4]$*. On a*

$$\begin{aligned} f^{-1}([0, 4]) &= \{x \in \mathbb{R}, f(x) \in [0, 4]\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}, x^2 \in [0, 4]\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}, 0 \leq x^2 \leq 4\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}, x^2 - 4 \leq 0\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, (x-2)(x+2) \leq 0\} \\ &= [-2, 2]. \end{aligned}$$

Propriétés

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Soient A_1, A_2 deux parties de E. Alors

a) $A_1 \subset A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$.

b) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

c) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ (l'autre inclusion est vraie si f est injective).

Si B_1, B_2 sont deux parties de F, alors

a') $B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

b') $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

c') $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f(B_1) \cap f(B_2)$

d') $f^{-1}\left(C_F^{B_1}\right) = C_E^{f^{-1}(B_1)}$.

De plus, si $A \subset E$ et $B \subset F$, alors on a

a") $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$ et on a égalité si f est surjective.

b") $A \subset f^{-1}(f(A))$ et on a égalité si f est injective.

Preuve :

a) On suppose que $A_1 \subset A_2$ et on montre que $f(A_1) \subset f(A_2)$. Soit $y \in f(A_1)$

$$\begin{aligned} y \in f(A_1) &\Longrightarrow \exists x \in A_1 : y = f(x) \\ &\Longrightarrow \exists x \in A_2 : y = f(x) \text{ car } A_1 \subset A_2 \\ &\Longrightarrow y \in f(A_1). \end{aligned}$$

D'où $f(A_1) \subset f(A_2)$.

b) Soit $y \in f(A_1 \cup A_2)$

$$\begin{aligned} y \in f(A_1 \cup A_2) &\Longleftrightarrow \exists x \in (A_1 \cup A_2) : y = f(x) \\ &\Longleftrightarrow [\exists x \in A_1 \text{ ou } \exists x \in A_2] : y = f(x) \\ &\Longleftrightarrow [\exists x \in A_1 : \ y = f(x)] \text{ ou } [\exists x \in A_2 : y = f(x)] \\ &\Longleftrightarrow y \in f(A_1) \text{ ou } y \in f(A_2) \\ &\Longleftrightarrow y \in (f(A_1) \cup f(A_2)). \end{aligned}$$

D'où $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

b) Soit $y \in f(A_1 \cap A_2)$

$$\begin{aligned}
y \in f(A_1 \cap A_2) &\iff \exists x \in (A_1 \cap A_2) : y = f(x) \\
&\iff [\exists x \in A_1 \text{ et } \exists x \in A_2] : y = f(x) \\
&\iff [\exists x \in A_1 : \ y = f(x)] \text{ et } [\exists x \in A_2 : y = f(x)] \\
&\implies y \in f(A_1) \text{ et } y \in f(A_2) \\
&\implies y \in (f(A_1) \cap f(A_2)).
\end{aligned}$$

D'où $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. Supposons que f est injective et montrons la deuxième inclusion. Soit $y \in (f(A_1) \cap f(A_2))$

$$\begin{aligned}
y \in (f(A_1) \cap f(A_2)) &\implies y \in f(A_1) \text{ et } y \in f(A_2) \\
&\implies [\exists x_1 \in A_1 : \ y = f(x_1)] \text{ et } [\exists x_2 \in A_2 : y = f(x_2)]
\end{aligned}$$

Donc $y = f(x_1) = f(x_2)$ et f est injective, ce qui implique que $x_1 = x_2 = x$. Donc $x \in (A_1 \cap A_2)$ et $y = f(x)$, c'est à dire $y \in f(A_1 \cap A_2)$.

a') On suppose que $B_1 \subset B_2$ et on montre que $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$. Soit $x \in f^{-1}(B_1)$

$$\begin{aligned}
x \in f^{-1}(B_1) &\implies f(x) \in B_1 \\
&\implies f(x) \in B_1 \text{ car } B_1 \subset B_2 \\
&\implies x \in f^{-1}(B_2).
\end{aligned}$$

Ce qui montre que $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

b') Soit $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$

$$\begin{aligned}
x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) &\iff f(x) \in (B_1 \cup B_2) \\
&\iff f(x) \in B_1 \text{ou } f(x) \in B_2 \\
&\iff x \in f^{-1}(B_1) \text{ ou } x \in f^{-1}(B_2) \\
&\iff x \in \left[f^{-1}(B_1) \ \cup \ f^{-1}(B_2)\right].
\end{aligned}$$

c') Même démonstration que b').

d') Soit $x \in f^{-1}\left(C_F^{B_1}\right)$

$$\begin{aligned}
x \in f^{-1}\left(C_F^{B_1}\right) &\iff f(x) \in C_F^{B_1} \\
&\iff f(x) \in F \text{ et } f(x) \notin B_1 \\
&\iff x \in E \text{ et } x \notin f^{-1}(B_1) \\
&\iff x \in C_E^{f^{-1}(B_1)}.
\end{aligned}$$

a") Soit $y \in f\left(f^{-1}(B)\right)$

$$\begin{aligned}
y \in f\left(f^{-1}(B)\right) &\implies \exists x \in f^{-1}(B) : y = f(x) \\
&\implies f(x) \in B \text{ et } y = f(x) \\
&\implies y \in B,
\end{aligned}$$

d'où $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$. **Réciproquement :** On suppose que f est surjective et on montre la deuxième inclusion.

Soit $y \in B \subset F$ et f surjective

$$\begin{aligned}
y \in B \subset F \text{ et } f \text{ surjective} &\implies \exists x \in E : y = f(x) \\
&\implies y = f(x) \in B \\
&\implies x \in f^{-1}(B) \\
&\implies y = f(x) \in f\left(f^{-1}(B)\right).
\end{aligned}$$

b") Etant donné un élément x de A, alors

$$\begin{aligned}
x \in A &\implies f(x) \in f(A) \\
&\implies x \in f^{-1}(f(A)),
\end{aligned}$$

d'où $A \subset f^{-1}(f(A))$. **Réciproquement :** On suppose que f est injective et on montre que $f^{-1}(f(A)) \subset A$. Soit $x \in f^{-1}(f(A))$

$$\begin{aligned}
x \in f^{-1}(f(A)) &\implies f(x) \in f(A) \\
&\implies \exists x_1 \in A : f(x) = f(x_1) \\
&\implies x = x_1 \text{ car } f \text{ est injective} \\
&\implies x \in A,
\end{aligned}$$

ce qui montre que $f^{-1}(f(A)) \subset A$.

Exercice :

On considère l'application

$$\begin{array}{llll} f:[-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}. \end{array}$$

1) Calculer $f^{-1}(\{2\})$ et $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$.
2) Etudier l'injectivité et la surjectivité de f.
Solution :

$$\begin{array}{llll} f: & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}. \end{array}$$

1) $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)=?$

$$\begin{array}{rcl} x\in f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) & \Longleftrightarrow & x\in[-1,1] \text{ et } f(x)=\dfrac{1}{2} \\ & \Longleftrightarrow & x\in[-1,1] \text{ et } \dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{1}{2} \\ & \Longleftrightarrow & x\in[-1,1] \text{ et } x^2-1=0 \\ & \Longleftrightarrow & x\in[-1,1] \text{ et } x=\pm 1 \\ & \Longleftrightarrow & x=1 \text{ ou } x=-1. \end{array}$$

D'où $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)=\{-1,1\}$.
$f^{-1}(\{2\})=?$

$$\begin{array}{rl} x\in f^{-1}(\{2\}) & x\in[-1,1] \text{ et } f(x)=2 \\ & x\in[-1,1] \text{ et } \dfrac{1}{1+x^2}=2 \\ & x\in[-1,1] \text{ et } x^2=\dfrac{-1}{2} \text{ impossible.} \end{array}$$

D'où $\nexists x\in f^{-1}(\{2\}) \Longrightarrow f^{-1}(\{2\})=\emptyset$.
2) Injectivité de f?
De la première question, on a $f(1)=f(-1)=\dfrac{1}{2}$. Donc f n'est pas injective.
Surjectivité de f?
De la première question, $\nexists x\in[-1,1]: f(x)=2$. Donc f n'est pas surjective.

Chapitre 3

Structures algébriques fondamentales

3.1 Groupes, Anneaux et Corps

3.1.1 Loi de composition interne

Soit E un ensemble non vide. On appelle loi de composition interne de E dans E toute application de $E \times E$ dans E.

Exemple 3.1

$$+: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \qquad \times: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x\times y \end{array}$$

Propriétés

Soient E un ensemble et " $*$ ", "." deux lois de composition interne dans E, alors :
i. " $*$ " est commutative $\Longleftrightarrow \forall x,y \in E : x*y = y*x$.
ii. " $*$ " est associative $\Longleftrightarrow \forall x,y,z \in E : (x*y)*z = x*(y*z)$.
iii. " $*$ " admet un élément neutre $\Longleftrightarrow \exists e \in E, \forall x \in E, x*e = e*x = x$.
iv. Si " $*$ " admet un élément neutre e et $x, x' \in E$,
x' est le symétrique de x pour $* \Longleftrightarrow x*x' = x'*x = e$.
v. "." est distributive par rapport à $*$
$\Leftrightarrow \forall x,y,z \in E; \begin{cases} x.(y*z) = (x.y)*(x.z) \\ (x*y).z = (x.z)*(y.z). \end{cases}$
vi. On dit que l'élément a est régulier ou simplifiable si
$\forall (x,y) \in E^2, \begin{cases} a*x = a*y \Longrightarrow x = y \\ \text{et} \\ x*a = y*a \Longrightarrow x = y. \end{cases}$

Remarque 3.1 *1. Si " $*$ " est une loi commutative alors pour démontrer qu'elle possède un élément neutre (resp. un élément symétrique), il suffit de démontrer l'existence de ce dernier à gauche ou à droite.*

2. Lorsque la loi est notée " $*$ " ou "." alors le symétrique d'un élément x est noté x^{-1} et lorsqu'elle est notée " $+$ ", le symétrique de x est noté $(-x)$.

3.1.2 Groupes

Soit G un ensemble muni d'une loi " $*$ ". On dit que $(G,*)$ est un groupe si et seulement si
1. " $*$ " est interne dans G.
2. " $*$ " est associative.
3. " $*$ " admet un élément neutre dans G.
4. Tout élément de G admet un symétrique pour la li " $*$ ".
Et si de plus " $*$ " est commutative, on dit que G est un groupe abélien (ou commutatif).
Si le nombre d'éléments de G (card$G$) est égal à n, on dit que G est un groupe fini d'ordre n.
Les notations les plus utilisées sont les suivantes

loi	composé de deux éléments	élément neutre	symétrique de x	composé de x et de sym. de y
$*$	$x*y$	e	sym x, x^{-1}	$x*y^{-1}$
.	$x.y$	1	x^{-1} ou $\frac{1}{x}$	$x.y^{-1}$
$\circ$	$f\circ g$	Id	f^{-1}	$f\circ g^{-1}$
T	xTy	e	x^{-1}	xTy^{-1}
$+$	$x+y$	0	$-x$	$x-y$

Remarque 3.2 *1.* $(\mathbb{R},+), (\mathbb{R}^*,\times), (\mathbb{Z},+)$ *sont des groupes abéliens.*
2. $(\mathbb{N},+)$ *n'est pas un groupe car les éléments de* $\mathbb{N}^*$ *n'ont pas de symétrique.*

Exemple 3.2 *$E =]-1, +1[$ et*

$$\forall a, b \in E, a * b = \frac{a+b}{1+ab}.$$

Montrer que $(E, *)$ est un groupe abélien.

1. Montrons que $\forall a, b \in E$, ona $a * b \in E$, c'est à dire

$$\begin{aligned} -1 < a * b < 1 &\iff |a * b| < 1 \\ &\iff \left|\frac{a+b}{1+ab}\right| < 1. \end{aligned}$$

Ona

$$\begin{aligned} a, b \in]-1, +1[&\implies |ab| < 1 \\ &\implies 1 + ab > 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \left|\frac{a+b}{1+ab}\right| < 1 &\iff |a+b| < |1+ab| = 1 + ab \\ &\iff |a+b| - 1 - ab < 0. \end{aligned}$$

Premier cas : *Si $a + b \leq 0$, alors*

$$\begin{aligned} |a+b| - 1 - ab &= -a - b - 1 - ab \\ &= -(1+a)(1+b) < 0. \end{aligned}$$

Deuxième cas : *Si $a + b \leq 0$, alors*

$$\begin{aligned} |a+b| - 1 - ab &= a + b - 1 - ab \\ &= -(1-a)(1-b) < 0. \end{aligned}$$

Des deux cas précédents, on déduit que la loi $*$ est interne dans E.

2. La loi $*$ est commutative, en vertu de la commutativité des lois d'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$. En effet, soient $a, b \in E$

$$\begin{aligned} a * b &= \frac{a+b}{1+ab} \\ &= \frac{b+a}{1+ba} \\ &= b * a. \end{aligned}$$

3. La loi $*$ est associative : soient $a, b, c \in E$

$$\begin{aligned} (a * b) * c &= \frac{a+b}{1+ab} * c \\ &= d * c, \text{ avec } d = \frac{a+b}{1+ab} \\ &= \frac{d+c}{1+dc} \\ &= \frac{\frac{a+b}{1+ab} + c}{1 + \frac{a+b}{1+ab}c} \\ &= \frac{a+b+c+abc}{1+ab} + \frac{1+ab}{1+ab+ac+bc} \\ &= \frac{a+b+c+abc}{1+ab+ac+bc} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a * \frac{b+c}{1+bc} \\ &= a * f, \text{ avec } f = \frac{b+c}{1+bc} \\ &= \frac{a+f}{1+af} \\ &= \frac{a + \frac{b+c}{1+bc}}{1 + a\frac{b+c}{1+bc}} \\ &= \frac{a+abc+b+c}{1+bc} + \frac{1+bc}{1+bc+ab+ac} \\ &= \frac{a+b+c+abc}{1+ab+ac+bc}. \end{aligned}$$

4. Il est clair 0 que est un élément neutre pour la loi $*$. En effet,

$$\begin{aligned} a*0 &= \frac{a+0}{1+a0} \\ &= \frac{a}{1} = a. \end{aligned}$$

5. Soit $a \in]-1,+1[$, alors

$$\begin{aligned} a*a' = 0 &\iff \frac{a+a'}{1+aa'} \\ &\iff a+a' = 0 \\ &\iff a' = -a \in]-1,+1[\,. \end{aligned}$$

Donc chaque élément de E admet un symétrique dans E.

Finalement, $(E,*)$ est un groupe abélien.

3.1.3 Sous groupes

Définition 3.1 *Soit $(G,*)$ un groupe et $\emptyset \subset H \subseteq G$. On dit que H est un sous groupe de G si et seulement si*

$$\forall x,y;\ x,y \in H \Longrightarrow x*y^{-1} \in H$$

où y^{-1} est le symétrique de y pour la loi $*$.

Exemple 3.3 *1. Si G est un groupe d'élément neutre e, alors $\{e\}$ et G sont des sous groupe de G tels que le premier est le plus petit et le second est le plus grand.*

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, L'ensemble $n\mathbb{Z} = \{nx, x \in \mathbb{Z}\}$ est un sous groupe de $(\mathbb{Z},+)$.

Proposition 3.1 *Soient $(G,*)$ un groupe d'élément neutre e et $\emptyset \subset H \subseteq G$. Alors*

$$H \text{ est un sous groupe de } G \iff \begin{cases} e \in H, \\ \forall x,y \in H, x*y \in H, \\ \forall x \in H, x^{-1} \in H. \end{cases}$$

Preuve 1 *H est un sous groupe de G, donc*

1. $e \in H$. En effet $H \neq \emptyset$, donc $\exists x \in H \Longrightarrow x*x^{-1} \in H \Longrightarrow e \in H$.

2. Soit $x \in H$, donc $x^{-1} \in H$. En effet,

$$\left.\begin{array}{l} e \in H \\ et \\ x \in H \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Longrightarrow e*x^{-1} \in H \text{ car } H \text{ s.g.} \\ \\ \Longrightarrow x^{-1} \in H \end{array}$$

3. Soient $x,y \in H$, donc $y^{-1} \in H$. Comme H est un sous groupe de G, alors

$$x*\left(y^{-1}\right)^{-1} \in H \Longrightarrow x*y \in H.$$

Proposition 3.2 *Soient G un groupe et $(H_i)_{i\in I}$ une famille de sous groupes de G, alors $\cap_{i\in I} H_i$ est un sous groupe de G.*

Preuve 2 *Notons $H = \cap_{i\in I} H_i$.*

1. $H \neq \emptyset$ car $e \in H_i$ pour tout i de I.

2. Soit $(x,y) \in H^2$

$$\begin{aligned} x,y \in H &\Longrightarrow \forall i \in I,\ x \in H_i \text{ et } y \in H_i \\ &\Longrightarrow \forall i \in I,\ x*y \in HF_i \\ &\Longrightarrow x*y \in H. \end{aligned}$$

3. Soit $x \in H$

$$\begin{aligned} x \in H &\Longrightarrow \forall i \in I,\ x \in H_i \\ &\Longrightarrow \forall i \in I,\ x^{-1} \in H_i \\ &\Longrightarrow x^{-1} \in H. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $H = \cap_{i\in I} H_i$ est un sous groupe de G.

Remarque 3.3 *En général, la réunion de sous groupes n'est pas un sous groupe. En effet, pour $G = \mathbb{Z}, H_1 = 2\mathbb{Z}, H_2 = 3\mathbb{Z}$, on a $H_1 \cup H_2 = 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$,*

$$2 \in 2\mathbb{Z}, 3 \in 3\mathbb{Z},\ mais\ (2+3) \in 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}.$$

Définition 3.2 *Soient $(G,*)$ un groupe et $A \subset G$. l'intersection de tous les sous groupes contenant A est un sous groupe de G appelé sous groupe engendré par A et noté $\langle A\rangle$.*

Proposition 3.3 *Soient $(G,*)$ un groupe et $A \subset G$ et $\langle A \rangle$ le sous groupe engendré par A, alors $\langle A \rangle$ est le plus petit sous groupe de G contenant (au sens de l'inclusion).*

Morphismes de groupes

Définition 3.3 *Soient $(G,*),(G',\perp)$ deux groupes. On appelle morphisme de groupes (ou homomorphisme) toute application $f:(G,*) \longrightarrow (G',\perp)$ telle que*

$$\forall x,y \in G : f(x*y) = f(x) \perp f(y).$$

Appellations

1. Un **endomorphisme** de groupes est un morphisme de $G \to G'$.
2. Un **isomorphisme** de groupes est un morphisme bijectif.
3. Un **automorphisme** de groupes est un endomorphisme bijectif.

Proposition 3.4 *Soient $(G,*),(G',\perp)$ deux groupes d'éléments neutres e,e' respectivement. Soit $f:(G,*) \longrightarrow (G',\perp)$ un morphisme de groupes, alors*

1. $f(e) = e'$.

2. $\forall x \in G, f\left(x^{-1}\right) = (f(x))^{-1}$.

Preuve 3 *1. Notons par z le symétrique de $f(e)$ dans G' et comme*

$$\begin{array}{rcl} f(e) & = & f(e*e) \\ & = & f(e)\perp f(e), \end{array}$$

donc

$$\begin{array}{rcl} e' & = & z\perp f(e) \\ & & z\perp(f(e)\perp f(e)) \\ & & (z\perp f(e))\perp f(e) \\ & & e'\perp f(e) = f(e). \end{array}$$

2. On a

$$\begin{array}{rcl} e' & = & f(e) \\ & = & f\left(x*x^{-1}\right) \\ & = & f(x)\perp f\left(x^{-1}\right), \forall x \in G. \end{array}$$

Donc

$$f(x)\perp f\left(x^{-1}\right) = eé \Longleftrightarrow f\left(x^{-1}\right) = (f(x))^{-1}.$$

Proposition 3.5 *Soient $(G,*),(G',\perp)$ et $(G",\nabla)$ trois groupes. Considérons $f:(G,*) \longrightarrow (G',\perp)$ et $g:(G',\perp) \longrightarrow (G",\nabla)$ deux morphismes de groupes. Alors $g\circ f:(G,*) \longrightarrow (G",\nabla)$ est aussi un morphisme de groupes.*

Preuve 4 *Soient x,x' deux éléments de G.*

$$\begin{array}{rcl} (g\circ f)(x*x') & = & g(f(x*x')) \\ & = & g(f(x)\perp f(x')) \\ & = & g(y\perp y') \\ & = & g(y)\nabla g(y') \\ & = & g(f(x))\nabla g(f(x')) \\ & = & (g\circ f)(x)\nabla(g\circ f)(x'). \end{array}$$

Ce qui montre que $g\circ f$ est un morphisme de groupes de G dans $G"$.

Proposition 3.6 *Soient $(G,*),(G',\perp)$ deux groupes et $f:(G,*) \longrightarrow (G',\perp)$ un morphisme de groupes. Si f est bijective, alors f^{-1} existe et de plus f^{-1} est aussi un morphisme de groupes.*

En particulier, $Id:(G,*) \longrightarrow (G,*)$ est un automorphisme de groupes.

Exemple :

$$f: \begin{array}{ccc} (\mathbb{R},+) & \longrightarrow & (\mathbb{R},+) \\ x & \longmapsto & 2x, \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} (\mathbb{R},+) & \longrightarrow & \left(\mathbb{R}_+^*,\times\right) \\ x & \longmapsto & e^x, \end{array}$$

sont des morphismes de groupes.

Noyau d'un morphisme

Définition 3.4 *Soit $f:(G,*) \longrightarrow (G',\perp)$ un morphisme de groupes. On désigne par e' l'élément neutre de G', alors l'image réciproque de $\{e'\}$ par l'application f est dite noyau de f et est noté* $\ker f$*, c'est à dire*

$$\ker f = f^{-1}(\{e'\}) = \{x \in G : f(x) = e'\}.$$

Proposition 3.7 *Soit $f : (G, *) \longrightarrow (G', \perp)$ un morphisme de groupes. Alors, le noyau de f est un sous groupe de G.*

Preuve 5 *1. $\ker f \neq \emptyset$ car $e \in \ker f$ $(f(e) = e')$.*

2. Soient $x, y \in \ker f \Longrightarrow f(x) = e'$ et $f(y) = e'$. Donc

$$\begin{aligned} f(x * y) &= f(x) \perp f(y) \\ &= e' \perp e' = e' \\ &\Longrightarrow (x * y) \in \ker f. \end{aligned}$$

3. Soit $x \in \ker f$, on $a(x, y)$Finalement, $\ker f$ est un sous groupe de G.

Exemple 3.4 *1. Soit*

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & (\mathbb{R}, +) \\ & (x, y) & \longmapsto & f(x, y) = x, \end{array}$$

alors

$$\begin{aligned} \ker f &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\right\} \\ &= \{(0, y), y \in \mathbb{R}\} = \{0\} \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Soit

$$\begin{array}{llll} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & (\mathbb{R}, +) \\ & (x, y) & \longmapsto & g(x, y) = x - y, \end{array}$$

alors

$$\begin{aligned} \ker g &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\right\} \\ &= \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Image d'un morphisme de groupes

Définition 3.5 *Soit $f : (G, *) \longrightarrow (G', \perp)$ un morphisme de groupes. L'ensemble*

$$f(G) = \{f(x), x \in G\}$$

est appelé image de f et est noté $\operatorname{Im} f$.

Proposition 3.8 *Soit $f : (G, *) \longrightarrow (G', \perp)$ un morphisme de groupes, alors $\operatorname{Im} f$ est un sous groupes de G'.*

Preuve 6 *1. $\operatorname{Im} f \neq \emptyset$ car $e' = f(e) \in \operatorname{Im} f$.*

2. Soient $y_1, y_2 \in \operatorname{Im} f$, celà imlique qu'$\exists x_1, x_2 \in G$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. On a

$$\begin{aligned} y_1 \perp y_2 &= f(x_1) \perp f(x_2) \\ &= f(x_1 * x_2) \in \operatorname{Im} f \end{aligned}$$

3. Soit $y \in \operatorname{Im} f$ et montrons que $y^{-1} \in \operatorname{Im} f$

$$\begin{aligned} y \in \operatorname{Im} f &\Longrightarrow \exists x \in G : y = f(x) \\ &\Longrightarrow y^{-1} = (f(x))^{-1} = f\left(x^{-1}\right) \in \operatorname{Im} f. \end{aligned}$$

D'où $\operatorname{Im} f$ est un sous groupe de G'.

Exemple 3.5 *1. Soit*

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & (\mathbb{R}, +) \\ & (x, y) & \longmapsto & f(x, y) = x, \end{array}$$

alors

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \left\{f(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{x : (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Soit

$$\begin{array}{llll} g: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & x & \longmapsto & g(x) = 3x, \end{array}$$

alors

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} g &= \{g(x) : x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{3x : x \in \mathbb{R}\} \\ &= 3Z. \end{aligned}$$

3. Soit

$$\begin{array}{llll} h: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \longmapsto & h(x, y) = (y, 0), \end{array}$$

alors

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} h &= \left\{h(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \{(y, 0) : y \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R} \times \{0\}. \end{aligned}$$

3.1.4 Anneaux

Définition 3.6 *Soit A un ensemble muni de deux lois de composition internes $*$ et $\cdot$; on dit que $(A, *, \cdot)$ est un anneau si et seulement si*

1) $(A, *)$ est un groupe abélien.
2) $\cdot$ est associative.
3) $\cdot$ est distributive sur $*$

Si $\cdot$ est commutative, l'anneau est dit commutatif.
Si $\cdot$ admet un élément neutre, l'anneau est dit unitaire.
Exemple :
$(\mathbb{Z}, +, \times), (\mathbb{R}, +, \times), (\mathbb{Q}, +, \times)$ et $(\mathbb{C}, +, \times)$ sont des anneaux commutatifs unitaires.

3.1.5 Sous anneaux

Définition 3.7 *Soient $(A, *, \cdot)$ un anneau et $A' \subset A$. On dit que A' est un sous anneau de A si et seulement si :*

1. $(A', *)$ est un sous groupe de A.
2. A' est stable pour la loi $\cdot$, c'est à dire $\forall x, y \in A' \Longrightarrow x \cdot y \in A'$.

Exemple :
$(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un sous anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Proposition 3.9 *Soient $(A, *, \cdot)$ un anneau et $A' \subset A$, alors A' est un sous anneau de A si et seulement si*

$$\forall x, y \in A'; \begin{cases} x * y \in A' \\ x \cdot y \in A'. \end{cases}$$

Anneaux intègres

Définition 3.8 *Soient $(A, *, \cdot)$ un anneau et $a \in A$, et on note par 0_A l'élément neutre de A pour la première loi $*$. On dit que a est un diviseur de zéro.*

1. $a \neq 0_A$.
2. $\exists x, y \in A; x \cdot a = a \cdot y = 0_A$.

A est dit intègre si

$$\forall x, y \in A; x \cdot y = 0_A \Longrightarrow x = 0_A \text{ ou } y = 0_A,$$

c'est à dire que A n'admet pas de diviseurs de zéro. Et A n'est pas intègre si

$$\exists x, y \in A, x \neq 0_A \text{ et } y \neq 0_A \text{ et } x \cdot y = 0_A.$$

Exemple 3.6 *Soit l'anneau $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\right\}$. On a pour $x = \overline{2}, y = \overline{3}$, on a*

$$x \cdot y = \overline{2} \times \overline{3} = \overline{6} = \overline{0}.$$

Donc l'anneau $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ n'est pas intègre.

Morphismes d'anneaux

Soient $(A, *, \cdot)$ et $(A', +, \times)$ deux anneaux et $f : A \longrightarrow A'$ une application. f est un morphisme d'anneaux si et seulement si

$$\forall x, y \in A; \begin{cases} f(x * y) = f(x) + f(y) \\ f(x \cdot y) = f(x) \times f(y). \end{cases}$$

Exemple 3.7 *1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \left\{, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, ..., \overline{n}\right\}$ l'ensemble des classes modulo n, alors*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ & x & \longmapsto & \overline{x}, \end{array}$$

est un morphisme de $(\mathbb{Z}, +, \times)$ vers $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \overline{+}, \overline{\times})$.

2.

$$\begin{array}{rccc} \psi: & C^1(\mathbb{R}) & \longrightarrow & C(\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & f', \end{array}$$

n'est pas un morphisme d'anneaux car $(f \times g)' \neq f' \times g'$.

Proposition 3.10 *1. Si $f : A \longrightarrow A'$ et $g : A' \longrightarrow A''$ sont deux morphismes d'anneaux, alors $g \circ f : A \longrightarrow A''$ est aussi un morphisme d'anneaux.*

2. Si $f : A \longrightarrow A'$ est un isomorphisme d'anneaux, alors $f^{-1} : A' \longrightarrow A$ est un isomorphisme d'anneaux.
3. $Id_A : A \longrightarrow A$ est un automorphisme d'anneaux.

Noyau et image d'un morphisme d'anneaux

Soit $f : (A, *, \cdot) \longrightarrow (A', +, \times)$ un morphisme d'anneaux. On désigne par $0_{A'}$ l'élément neutre de A' pour la loi $+$. On définit le noyau de f par

$$\ker f = f^{-1}(\{0_{A'}\}) = \{x \in A : f(x) = 0_{A'}\}.$$

On définit l'image de f par

$$\operatorname{Im} f = \{f(x), x \in A\}.$$

Proposition 3.11 *1.* $\ker f$ *n'est pas en général un sous anneau de* A.

2. $\operatorname{Im} f$ *est un sous anneau de* A'.

3.1.6 Corps

Définition 3.9 *Un ensemble* K *muni de deux loi* $*, \cdot$ *est dit corps si*

1. $(K, *, \cdot)$ *est un anneau unitaire.*

2. Tout élément de $K - \{0_K\}$ *admet un inverse pour "·" et si de plus "·" est commutative, on dit que le corps est commutatif.*

Exemples :

1. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sont des corps commutatifs pour les lois usuelles $+, \times$.
2. $(\mathbb{Z}, +, \times)$ n'est pas un corps car les éléments de $\mathbb{Z}$ n'ont pas d'inverses pour la loi $\times$.

3.1.7 Sous corps

Définition 3.10 *Soient* $(K, +, \times)$ *un corps et* $K' \subset K$. *On dit que* K' *est un sous anneau de* K *si :*

1. $\forall x, y \in K', x - y \in K'$.

2. $\forall x \in K', \forall z \in K' - \{0_K\}, x \times z^{-1} \in K'$.

Exemple

$\mathbb{Q}$ est un sous corps de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ est un sous corps de $\mathbb{C}$ pour les lois usuelles.

Remarque 3.4 *Les définitions précédentes d'un morphismes d'anneaux, le noyau et l'image ainsi que leurs propriétés restent vraies pour les corps.*

Soit $f : (K, *, \cdot) \longrightarrow (K', +, \times)$ un morphisme de corps, alors f est injective si et seulement si

$$\forall x \in K, f(x) = 0_{K'} \Longrightarrow x = 0_K.$$

Preuve 7 *On suppose que* $\forall x \in K, f(x) = 0_{K'} \Longrightarrow x = 0_K$ *et on montre que* f *est injective.*

Soient $x, y \in K : f(x) = f(y)$. *On a*

$$\begin{array}{rcl} f(x) = f(y) & \Longrightarrow & f(x) + (-f(y)) = 0_{K'} \\ & \Longrightarrow & f(x) + f(-y) = 0_{K'} \\ & \Longrightarrow & f(x * (-y)) = 0_{K'} \\ & \Longrightarrow & x * (-y) = 0_K \\ & \Longrightarrow & x = y. \end{array}$$

Ce qui montre que f *est injective. L'autre implication est immédiate.*

Théorème 3.1 *Soit* $f : (K, *, \cdot) \longrightarrow (K', +, \times)$ *un morphisme de corps, alors oubien il est nul oubien il est injectif.*

Preuve 8 *On suppose que* f *n'est pas injective, donc d'après le lemme précédent,* $\exists x \in K, x \neq 0_K$ *et* $f(x) = 0_{K'}$. *On a* $\forall y \in K - \{0_K\}$

$$\begin{array}{rcl} f(y) & = & f\left(x \cdot x^{-1} \cdot y\right) \\ & = & f(x) \times f\left(x^{-1}\right) \times f(y) \\ & = & 0_{K'} \times f\left(x^{-1}\right) \times f(y) = 0_{K'}. \end{array}$$

Donc f *est l'application nulle.*

3.2 Ensemble des nombres réels

Introduction

i) Les entiers naturels :

On désigne l'ensemble des entiers naturels par $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$. Dans cet ensemble, on définit les deux opérations somme et produit suivantes :

$$+ : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \qquad \times : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (x,y) & \longmapsto & x\times y. \end{array}$$

On définit de façon analogue la soustraction de x et y s'il existe un nombre a de $\mathbb{N}$ vérifianl la relation $x = y + a$ et on le désigne par $a = x - y$. On appelle la division de x par y $(y \neq 0)$ s'il existe un nombre a de $\mathbb{N}$ vérifianl la relation $x = y \times a$ et on le désigne par $a = \dfrac{x}{y}$. Notons que les opérations soustraction et division peuvent ne pas avoir de sens dans $\mathbb{N}$. Donc l'ensemble des entiers naturels n'est pas suffisant pour effectuer l'opération $y + a = x$, d'où la nécessité d'élargie cet ensemble.

ii) Ensemble des entiers relatifs

A partir de $\mathbb{N}$, nous construisons un ensemble appelé ensemble des entiers relatifs désigné par $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ dans lequel l'égalité $a + x = y$ admet toujours une solution. Les éléments $(-x)$ pour $x \in \mathbb{N}$ sont les symétriques de x, c'est à dire ils vérifient la relation $x + (-x) = (-x) + x = 0$. L'ensemble $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire. Notons que cet ensemble n'est pas suffisant pour effectuer l'opération $ay = x$ $(y \neq 0)$ d'inconnue a.

iii) Ensemble des nombres rationnels :

A partir de $\mathbb{Z}$, nous construisons un ensemble appelé ensemble des nombres rationnels dans lequel l'équation $a \times y + b = x$ $(y \neq 0)$ admet toujours une solution. On désigne cet ensemble par

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\} = \left\{\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*\right\}.$$

Exemple : $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = ...$ pour celà on choisit p et q premiers entre eux.

L'ensemble $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un corps commutatif unitaire. Notons que cet ensemble n'est pas suffisant pour résoudre par exemple l'équation $x^2 - 2 = 0$, la solution de cette équation est $x = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, en effet :

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$\Longrightarrow$ $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ (avec p et q premiers entre eux)

$\Longrightarrow 2 = \dfrac{p^2}{q^2} \Longrightarrow p^2 = 2q^2 \Longrightarrow$ p est pair

$\Longrightarrow \exists m \in \mathbb{Z}, p = 2m$

$\Longrightarrow p^2 = 4m^2 = 2q^2$

$\Longrightarrow q^2 = 2m^2$

$\Longrightarrow$ q est un nombre pair, donc n'est pas premier avec p contradiction

$\Longrightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Développement décimal d'un nombre rationnel

Soit $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, en effectuant la division euclidienne de p par q, on obtient $\frac{p}{q} = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4...$ et s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$: $\alpha_k = 0$ alors on obtient $\frac{p}{q} = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_n$ qui s'appelle développement décimal limité, (exemple $\frac{1}{8} = 0,125$). Sinon, c'est à dire $\forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha_n \neq 0$ alors $\frac{p}{q} = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_n...$ dit développement décimal illimité avec $\alpha_i \in \{0, 1, 2, 3, ..., 9\}$.

Un développement décimal illimité périodique est de la forme :

$$\frac{p}{q} = \alpha_0, \alpha_1\alpha...\alpha_n \underbrace{\beta_1\beta_2...\beta_m}\beta_1\beta_2...\beta_m....$$

Théorème 3.2 *Il existe une application bijective entre $\mathbb{Q}$ et les développement décimaux illimités périodiques de période différente de 9.*

Le nombre $1, 202200220002....$ n'est pas rationnel. Il existe alors des nombres autres que les rationnels.

Définition 3.11 *On appelle nombre irrationnel tout développement décimal illimité périodique.*

Définition 3.12 *On appelle ensemble des nombres réels noté $\mathbb{R}$ l'ensemble formé des nombres rationnels et irrationnels.*

Définition axiomatique des nombres réels

$(\mathbb{R}, +, \times)$ et $(\mathbb{R}, \leq)$ satisfont aux axiomes suivants :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x + y = y + x$ (commutativité de $+$)
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x + y) + z = x + (y + z)$ (associativité de $+$).
3. $\exists e = 0 \in \mathbb{R}$, appelé élément neutre vérifiant

$$0 + x = x + 0 = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

4. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x' \in \mathbb{R}$ appelé élément symétrique de x noté $(-x)$ vérifiant
$$x + x' = x' + x = 0.$$
5. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \times y = y \times x$ (commutativité de $\times$).
6. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$ (associativité de $\times$).
7. $\exists e' = 1 \in \mathbb{R}$, appelé élément unité vérifiant
$$1 \times x = x \times 1 = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$
8. $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0, \exists x' \in \mathbb{R}$ appelé élément inverse de x noté $x^{-1} = \frac{1}{x}$ vérifiant
$$x \times x^{-1} = x^{-1} \times x = 1.$$
9. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$ (distributivité de $\times$ par rapport à $+$).
10. $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$ (réflexivité de $\leq$).
11. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y$ et $y \leq x \Longrightarrow x = y$ (antisymétrie de $\leq$).
12. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \leq y$ et $y \leq z \Longrightarrow x \leq z$ (transitivité de $\leq$).
13. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a soit $x \leq y$ ou $y \leq x$ ($\leq$ est un ordre total).
14. $x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z, \forall z \in \mathbb{R}$.
15. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \leq y$ et $z \geq 0 \Longrightarrow xz \leq yz$.
16. Si $X \subset \mathbb{R}$ et $Y \subset \mathbb{R}$ alors $\forall x \in X, \forall y \in Y, \exists c \in \mathbb{R}$ tel que $x \leq c \leq y$ (axiome de continuité).

Remarque 3.5 *Les axiomes de 1 à 15 sont vrais dans $\mathbb{Q}$, tandis que $\mathbb{Q}$ ne possède pas l'axiome de continuité.*

Borne supérieure, borne inférieure d'un ensemble de $\mathbb{R}$

Soit X une partie de $\mathbb{R}$.

Définition 3.13 *On dit que X admet un maximum (resp. minimum) s'il existe $x_0 \in X$:*
$$\forall x \in X \quad x \leq x_0 \text{ (resp. } x \geq x_0).$$
2) L'ensemble X est dit majoré (resp. minoré) si et seulement si
$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in X \quad x \leq M$$
(resp.
$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in X \quad x \geq m).$$
M (resp. m) est dit majorant de X (resp. minorant de X).

Si X est majoré (resp. minoré) alors il admet une infinité de majorants (resp. minorants).

Définition 3.14 *Le plus petit des majorants (resp. le plus grands des minorants) d'un ensemble X est appelé borne supérieure (resp. borne inférieure) de X, notée $\sup X$ (resp. $\inf X$).*

Caractérisation

$$\sup X = M \iff \begin{cases} 1.\ M \text{ est un majorant de } X \\ 2.\ M \text{ est le plus petit des majorants} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 1.\ \forall x \in X \quad x \leq M \\ 2.\ \forall \epsilon > 0, M - \epsilon \text{ n'est pas un majorant} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 1.\ \forall x \in X \quad x \leq M \\ 2.\ \forall \epsilon > 0, \exists x_0 \in X, x_0 > M - \epsilon. \end{cases}$$

$$\inf X = m \iff \begin{cases} 1.\ m \text{ est un minorant de } X \\ 2.\ m \text{ est le plus grand des minorants} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 1.\ \forall x \in X \quad x \geq m \\ 2.\ \forall \epsilon > 0, m + \epsilon \text{ n'est pas un minorant} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 1.\ \forall x \in X \quad x \geq m \\ 2.\ \forall \epsilon > 0, \exists x_0 \in X, x_0 < m + \epsilon. \end{cases}$$

Remarque 3.6 *En général, $\sup X$ et $\inf X$ n'appartiennent pas à l'ensemble X lui-même. Si $\sup X$, $\inf X \in X$, $\sup X$ est dit plus grand élément de X noté $\max X$ et $\inf X$ est dit plus petit élément de X noté $\min X$. Sinon, on dit que $\max X$ et $\min X$ n'existent pas.*

Exemple 3.8 *Soit* $X =]-1, 2]$, *déterminer* $\sup X, \inf X, \max X$ *et* $\min X$ *s'ils existent.*

1) Pour $\inf X$:

Il est clair que $\forall x \in X, x > -1 \Longrightarrow m = -1$ *est un minorant de* X.

On montre que m *est le plus grand des minorants. En effet, soit* $\epsilon > 0$, *on cherche s'il existe* x_0 *de* X *tel que*

$$-1 \leq x_0 < m + \epsilon = -1 + \epsilon.$$

On distingue deux cas :

i) Si $\epsilon > 1$ *alors* $\epsilon - 1 > 0$ *et il suffit de prendre*

$$-1 \leq 0 < x_0 = \frac{\epsilon - 1}{2} < \epsilon - 1.$$

ii) Si $\epsilon < 1$ *alors* $\epsilon - 1 < 0$ *et il suffit de prendre*

$$-1 \leq x_0 = -1 + \frac{\epsilon}{2} < -1 + \epsilon < 0.$$

L'existence de x_0 *montre que* $\inf X = -1$ *et comme ce dernier n'appartient pas à* X, *on a* $\min X$ *n'existe pas.*

2) Pour $\sup X$:

De manière analogue, on démontre que $\sup X = \max X = 2$.

Théorème 3.3 *1. Les bornes inférieure et supérieure d'une partie de* $\mathbb{R}$ *si elles existent sont uniques.*

2. Tout ensemble majoré (resp. minoré) admet une borne supérieure (resp. inférieure).

Preuve 9 *1. Soient* M_1, M_2 *deux bornes supérieures d'un ensemble* X. *Alors*

M_1 *est une borne supérieure et* M_2 *est un majorant* $\Longrightarrow M_1 \leq M_2$.

M_2 *est une borne supérieure et* M_1 *est un majorant* $\Longrightarrow M_2 \leq M_1$.

Donc $M_1 = M_2$.

2. Soit X *une partie de* $\mathbb{R}$ *majorée. Désignons par* Y *l'ensemble des majorants de* X, *alors*

$$\forall x \in X, \forall y \in Y, x \leq y,$$

cela implique

$$\exists c \in \mathbb{R} : x \leq c \leq y.$$

On a $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in X, x \leq c \Longrightarrow c$ *est un majorant de* X.

On a aussi $c \leq y, \forall y \in Y \Longrightarrow c$ *est le plus petit des majorants de* X.

Finalement, $c = \sup X$.

Un raisonnement analogue pour la borne inférieure.

Axiome d'Archimède

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : x < n$.

Démonstration

Supposons le contraire, c'est à dire

$$\begin{aligned} &\exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : n \leq x \\ &\Longrightarrow \mathbb{N} \text{ est majoré par } x \\ &\Longrightarrow \exists \sup \mathbb{N} = M, \end{aligned}$$

or

$$\sup \mathbb{N} = M \Longleftrightarrow \begin{cases} 1.\ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \leq M \\ 2.\ \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n_0 > M - \epsilon. \end{cases}$$

Pour $\epsilon = 1$, on a $n_0 > M - 1 \Longrightarrow M < n_0 + 1$. Alors, nous obtenons

$$n_0 \leq M < n_0 + 1 \in \mathbb{N},$$

ce qui contredit la définition de la borne supérieure et l'axiome d'Archimède est démontré.

Propriété d'Archimède et ses conséquences :

Le principe d'Archimède peut s'écrire comme suit :

$$\forall h > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, nh > x.$$

Comme conséquence de l'axiome d'Archimède

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z} : n \leq x < n + 1.$$

Partie entière d'un nombre réel

Définition 3.15 *On appelle partie entière de* $x \in \mathbb{R}$ *l'entier* k *vérifiant* $k \leq x < k + 1$. *On le note par* $E(x)$ *ou* $[x]$. *On définit aussi* $E(x)$ *par le plus grand entier inférieur ou égal à* x.

Exemple : $E(2,67) = 2; E(0,2) = 0, E(-2,67) = -3.$
Propriétés
1. $\forall x \in \mathbb{Z} \Longrightarrow E(x) = x.$
2. $x = E(x) + \alpha$, où $0 \leq \alpha < 1$.
Valeur absolue d'un nombre réel
On définit la valeur absolue de $x \in \mathbb{R}$ par

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

La valeur absolue vérifie $|x| \leq \alpha \Longleftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha,\ \alpha > 0$
Intervalles dans $\mathbb{R}$
Soit I une partie de $\mathbb{R}$.
I est un intervalle si et seulement si

$$(\forall x, y \in I, x < y) \Longrightarrow (\forall z \in \mathbb{R}, x < z < y \Longrightarrow z \in I).$$

Intervalle ouvert : $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.
Intervalle fermé : $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.
Intervalle semi-ouvert : $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$.
On note $\mathbb{R}$ par $]-\infty, +\infty[$.

3.3 Ensembles des nombres complexes

Introduction
Notons que $\mathbb{R}$ n'est pas suffisant pour résoudre les équations $x^2 + \alpha = 0$ pour $\alpha > 0$ et celà nécessite d'élargir cet ensemble.
On munit $\mathbb{R}^2$ de deux lois de composition internes "+" et "$\cdot$" par : $\forall (a,b), (a',b') \in \mathbb{R}^2$

$$(a,b) + (a',b') = (a+a', b+b') \text{ et}$$
$$(a,b) \cdot (a',b') = (aa' - bb', ab' + ba').$$

On vérifie aisément que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ a une structure de corps commutatif unitaire tel que si on note $z = (a,b)$, alors on montre que :
(i) $0 = (0,0)$ est l'élément neutre pour la première loi "+".
(ii) $z' = (-a,-b)$ est le symétrique de $z = (a,b)$ pour la loi "+".
(iii) $1 = (1,0)$ est l'élément neutre de la deuxième loi "$\cdot$".
(iv) $z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ est le symétrique de z pour "$\cdot$".
Le corps ainsi défini est appelé corps des nombres complexes, on le note $\mathbb{C}$, et on considère l'application

$$\begin{array}{cccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & (x,0) \end{array}$$

alors f est un isomorphisme de corps, en effet :
1. f est bijective (évident).
2. $f(x+x') = (x+x',0) = (x,0) + (x',0) = f(x) + f(x')$.
3. $f(x \cdot x') = (x \cdot x', 0) = (x,0) \cdot (x',0) = f(x) \cdot f(x')$.
Donc on peut identifier $\mathbb{R}$ à un sous-corps de $\mathbb{C}$ formé des éléments $(a,0)$ avec $a \in \mathbb{R}$
A l'aide de cet isomorphisme, le nombre complexe $(a,0)$ sera noté simplement a. On pose $i = (0,1)$ alors on a

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1.$$

Par suite, tout nombre complexe $z = (a,b)$ peut s'écrire sous forme

$$\begin{array}{rcl} z = (a,b) & = & (a,0) + (0,b) \\ & = & (a,0) + (0,1)(b,0) \\ & & a + ib, \end{array}$$

d'où la notation usuelle d'un nombre complexe et on a les relations suivantes :
1. $z = a + ib$, $a = \mathrm{Re}(z)$ (partie réelle de z) et $b = \mathrm{Im}(z)$ (partie imaginaire de z).
2. Si $b = 0$, alors z est un réel. Si $a = 0$, alors z est dit imaginaire pur.
3. Si $z = a + ib$, alors le conjugué de z est le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$.
4. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$.

5. Le module de z est le nombre réel positif

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

6. $|z.z'| = |z| . |z'|$ et $|z + z'| = |z| + |z'|$.

Représentation d'un nombre complexe

a)Image d'un nombre complexe :

A chaque nombre complexe $z = a + ib$, on fait correspondre sur le plan oxy le point M qui a pour abscisse x et pour ordonnée y $(M = (a, b))$ oubien le vecteur $\overrightarrow{OM}$. Le point M s'appelle l'image du nombre complexe z et z est dit l'affixe du point M.

Le plan oxy qui contient les images des nombres complexes $z = (a, b)$ s'appelle le plan complexe dont ox est l'axe réel et oy est l'axe imaginaire.

b) Forme trigonométrique (forme polaire ou géométrique) :

L'image M du nombre complexe $z = a + ib$ peut aussi être déterminée par la mesure θ de l'angle $\left(\overrightarrow{Ox}., \overrightarrow{OM}.\right)$ et par le nombre r qui mesure la longueur du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Pour tout nombre complexe z, il existe un couple $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ tel que

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

1. Pour $z \neq 0$, on a $r = |z|, \cos\theta = \dfrac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}, \sin\theta = \dfrac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}$ et le nombre θ est défini à 2π près.

2. Pour $z = 0$, on a $r = 0$ et θ quelconque. Le nombre θ est appelé argument de z et on a une infinité, et quand $\theta \in [0, 2\pi]$ on écrit $\arg z$.

Proposition 3.12 *Si z et z' sont deux nombres complexes tels que $\theta = \arg z$ et $\theta' = \arg z'$, alors on a*

1. $z = z' \Longleftrightarrow |z| = |z'|$ et $\theta = \theta' + 2k\pi$.

2. $z.z' = |z| . |z'| (\cos(\theta + \theta') + \sin(\theta + \theta'))$.

3. Si $z' \neq 0$, $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{|z|}{|z'|}(\cos(\theta - \theta') + \sin(\theta - \theta'))$.

Exponentielle complexe

Lorsque $z = a + ib$, on définit $e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib}$ avec $e^{ib} = \cos b + i\sin b$. ainsi tout nombre complexe s'écrit

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}.$$

Proposition 3.13 ***(Formule de Moivre)***

Pour tout nombre réel θ et tout entier n de $\mathbb{N}$, on a

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

Preuve 10 *1. Pour $n = 1$, on a $(\cos\theta + i\sin\theta)^1 = (\cos 1\theta + i\sin 1\theta)$ qui est vraie.*

2. On suppose $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta)$, alors on a

$$\begin{aligned}
(\cos\theta + i\sin\theta)^{n+1} &= (\cos\theta + i\sin\theta)^n(\cos\theta + i\sin\theta) \\
&= (\cos n\theta + i\sin n\theta)(\cos\theta + i\sin\theta) \\
&= \cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta \\
&\quad + i(\sin\theta\cos n\theta + \cos\theta\sin n\theta) \\
&= \cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta.
\end{aligned}$$

Application de la formule de Moivre, racine n$^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe

On appelle racine n$^{\text{ième}}$ de z un nombre complexe $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ tel que $w^n = z$ et on écrit $w = \sqrt[n]{z}$.

On a

$$\begin{aligned}
w^n = z &\Longleftrightarrow [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = \rho(\cos x + i\sin x) \\
&\Longleftrightarrow r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = \rho(\cos x + i\sin x).
\end{aligned}$$

Par identification,

$$\begin{cases} r^n = \rho \\ n\theta = x + 2k\pi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \theta = \dfrac{x + 2k\pi}{n}, k = 0, 1, ..., n-1. \end{cases}$$

Exemple 3.9 *Calculer les racines cubique de $z = 1 - i$.*

On a $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$. les racines cubiques de z sont les solutions de l'équation $w^3 = z$ avec $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Ce qui donne

$$\begin{cases} r^3 = \sqrt{2} \\ 3\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[6]{2} \\ \theta = \dfrac{3\pi + 8k\pi}{12}, k = 0, 1, 2. \end{cases}$$

On aura, $w_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $w_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$ et $w_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$.

Chapitre 4

Suites numériques

4.1 Définitions

Soit X une partie de $\mathbb{R}$.

Définition 4.1 *On appelle suite numérique toute application*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \rightarrow & X \\ & n & \longmapsto & f(n) = x_n. \end{array}$$

Toute suite numérique s'écrit comme $x_0, x_1, ..., x_n$, dont x_n est dit le terme général.

Exemple La suite dont le terme général $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ s'écrit $-1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, ..., \frac{(-1)^n}{n}, ...$

4.1.1 Opérations sur les suites

Soient $(x_n), (y_n)$ deux suites numériques.
1. On dit que les suites $(x_n), (y_n)$ sont égales si $x_n = y_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. On appelle somme de (x_n) et (y_n) la suite (z_n) telle que $z_n = x_n + y_n$.
3. On appelle produit de (x_n) et (y_n) la suite (w_n) telle que $w_n = x_n . y_n$.

Suites bornées

La suite (U_n) est dite majorée (resp. minorée) s'il existe $M \in \mathbb{R}$ (resp. $m \in \mathbb{R}$) tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq M$ (resp. $m \leq U_n$). La suite (U_n) est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée, c'est à dire

$$\begin{array}{l} \exists m, M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, m \leq U_n \leq M \\ \text{oubien} \\ \exists c > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, |U_n| \leq c. \end{array}$$

De plus

$$\sup U_n = M \Longleftrightarrow \begin{cases} 1. \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ U_n \leq M \\ 2. \ \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, M - \epsilon < U_{n_0} \leq M, \end{cases}$$

$$\inf U_n = m \Longleftrightarrow \begin{cases} 1. \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ m \leq U_n \\ 2. \ \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, m \leq U_{n_0} \leq m + \epsilon. \end{cases}$$

Limite d'une suite numérique

Définition 4.2 *Le nombre l de $\mathbb{R}$ est appelé limite de la suite (U_n) lorsque n tend vers $+\infty$ si pour tout $\epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall n, n \geq n_0 \Longrightarrow |U_n - l| < \epsilon$ et on écrit*

$$\lim_{n\to\infty} U_n = l \Longleftrightarrow [\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall n : (n \geq n_0 \Longrightarrow |U_n - l| < \epsilon)].$$

Exemple 4.1 *Montrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Soit $\epsilon > 0$, on a*

$$\begin{array}{rcl} \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \epsilon & \Longleftrightarrow & \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| < \epsilon \\ & \Longrightarrow & \frac{1}{n+1} < \epsilon \\ & \Longrightarrow & 1 < \epsilon + \epsilon n \\ & \Longrightarrow & n > \frac{1-\epsilon}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} - 1. \end{array}$$

If suffit donc de prendre $n_0 = E\left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right) + 1$ et donc

$$\left[\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = E\left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right) + 1 \in \mathbb{N}, \forall n : \left(n \geq n_0 \Longrightarrow \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \epsilon\right)\right] \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Limites infinies

$$\lim_{n\to\infty} U_n = +\infty \Longleftrightarrow [\forall A > 0, \exists n_0 = n_0(A) \in \mathbb{N}, \forall n : (n \geq n_0 \Longrightarrow U_n > A)],$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = -\infty \Longleftrightarrow [\forall A > 0, \exists n_0 = n_0(A) \in \mathbb{N}, \forall n : (n \geq n_0 \Longrightarrow U_n < -A)].$$

Définitions

1. On dit que la suite (U_n) est infiniment petite si $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$.
2. On dit que la suite (U_n) est infiniment grande si $\lim_{n\to\infty} U_n = +\infty$.

Propriétés :

1. La somme (resp. le produit) d'un nombre fini de suites infiniment petites est une suite infiniment petite.
2. Le produit d'un nombre par une suite infiniment petite est une suite infiniment petite.

4.2 Suites convergentes

Définition 4.3 *1. La suite (U_n) est dite convergente s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n\to\infty} U_n = l$.*
2. La suite (U_n) est dite divergente si sa limite est infinie ou n'existe pas.

Théorème 4.1 ***(Unicité de la limite)***
La limite de toute suite convergente est unique.

Preuve 11 *Soit (U_n) une suite convergente, On pose $\lim_{n\to\infty} U_n = l_1$ et $\lim_{n\to\infty} U_n = l_2$. Alors on a*

$$\lim_{n\to\infty} U_n = l_1 \Longleftrightarrow \left[\forall \epsilon > 0, \exists n_1 = n_1(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall n : \left(n \geq n_1 \Longrightarrow |U_n - l_1| < \frac{\epsilon}{2}\right)\right]$$

et

$$\lim_{n\to\infty} U_n = l_2 \Longleftrightarrow \left[\forall \epsilon > 0, \exists n_2 = n_2(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall n : \left(n \geq n_2 \Longrightarrow |U_n - l_2| < \frac{\epsilon}{2}\right)\right].$$

On pose $n_0 = \max(n_1, n_2)$, donc pour $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} |l_1 - l_2| &= |(l_1 - U_n) + (U_n - l_2)| \\ &\leq |l_1 - U_n| + |U_n - l_2| \\ &< \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Finalement, pour $n \geq n_0$

$$\forall \epsilon > 0, |l_1 - l_2| < \epsilon \Longrightarrow l_1 - l_2 = 0 \Longrightarrow l_1 = l_2.$$

Exemple : Les suites $U_n = (-1)^n, V_n = \sin n, W_n = \cos n$ ne sont pas convergentes car elles n'ont pas des limites uniques pour chacune d'elles.

Théorème 4.2 *Toute suite convergente est bornée.*

Preuve 12 *Soit (U_n) une suite convergente, c'est à dire $\lim_{n\to\infty} U_n = l$.*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} U_n = l &\Longleftrightarrow [\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall n, (n \geq n_0 \Longrightarrow |U_n - l| < \epsilon)] \\ &\Longleftrightarrow \forall n, n \geq n_0 \Longrightarrow -\epsilon < U_n - l < \epsilon \\ &\Longleftrightarrow \forall n, n \geq n_0 \Longrightarrow l - \epsilon < U_n < \epsilon + l. \end{aligned}$$

Donc, à partir du rang n_0 tous les termes de (U_n) se trouvent à l'intérieur de l'intervalle $]l - \epsilon, \epsilon + l[$. A l'extérieur de cet intervalle, il reste un nombre fini de termes $U_0, U_1, ..., U_{n_0-1}$. Posons $M = \max(U_0, U_1, ..., U_{n_0-1}, l + \epsilon)$ et $m = \min(U_0, U_1, ..., U_{n_0-1}, l - \epsilon)$, alors $\forall n \geq 0$, $m \leq U_n \leq M$, c'est à dire (U_n) est bornée.

Remarque 4.1 *La réciproque de ce théorème n'est pas vraie.*

Exemple : La suite $U_n = (-1)^n$ est bornée mais elle n'est pas convergente car sa limite n'est pas unique.

Suites de même nature

Deux suites sont de même nature si la convergence (resp. divergence) de l'une implique la convergence (resp. divergence) de l'autre.

Passage à la limite dans les inégalités

Proposition 4.1 *Soient (U_n) et (V_n) deux suites convergentes telles que $\lim_{n\to\infty} U_n = l_1$ et $\lim_{n\to\infty} V_n = l_2$. Si $l_1 < l_2$ alors à partir d'un certain rang, on a $U_n < V_n$.*

Preuve 13 *Soit un nombre l tels que $l_1 < l < l_2$*

$$\lim_{n\to\infty} U_n = l_1 \Longleftrightarrow [\forall \epsilon > 0, \exists n_1 = n_1(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall n : (n \geq n_1 \Longrightarrow |U_n - l_1| < \epsilon)] .$$

Pour $\epsilon = l - l_1$, on obtient

$$\begin{aligned} n \geq n_1 &\Longrightarrow -\epsilon < U_n - l_1 < \epsilon \\ &\Longrightarrow -(l - l_1) < U_n - l_1 < l - l_1 \\ &\Longrightarrow U_n < l. \end{aligned}$$

De même

$$\lim_{n\to\infty} V_n = l_2 \Longleftrightarrow [\forall \epsilon > 0, \exists n_2 = n_2(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall n : (n \geq n_2 \Longrightarrow |V_n - l_2| < \epsilon)] .$$

Pour $\epsilon = l_2 - l$, on obtient

$$\begin{aligned} n \geq n_2 &\Longrightarrow -\epsilon < V_n - l_2 < \epsilon \\ &\Longrightarrow -(l_2 - l) < U_n - l_2 < l_2 - l \\ &\Longrightarrow V_n > l. \end{aligned}$$

Posons $n_0 = \max(n_1, n_2)$, alors pour $n \geq n_0$ $U_n < l$ et $V_n > l$ et donc $U_n < V_n$.

Corollaire 4.1 *1. Si $U_n < V_n$ à partir d'un certain rang alors $l_1 = \lim_{n\to\infty} U_n \leq \lim_{n\to\infty} V_n = l_2$.*
2. Si $U_n < a$ à partir d'un certain rang alors $l_1 = \lim_{n\to\infty} U_n \leq a$. En particulier si $a = 0$, on déduit que toute suite positive ne peut pas admettre une limite négative.

Preuve 14 *Par l'absurde, $l_1 > l_2 \Longrightarrow \exists n_0 : n \geq n_0 \Longrightarrow U_n > V_n$ (contradiction).*

Théorème 4.3 *Soient $(U_n), (V_n)$ et (W_n) trois suites telles qu'à partir d'un certain rang $V_n \leq U_n \leq W_n$. Si $\lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} W_n = l$ alors $\lim_{n\to\infty} U_n = l$.*

Preuve 15 *On a*

$$\lim_{n\to\infty} V_n = l \Longleftrightarrow [\forall \epsilon > 0, \exists n_1 = n_1(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall n : (n \geq n_1 \Longrightarrow |V_n - l| < \epsilon)]$$

et

$$\lim_{n\to\infty} W_n = l \Longleftrightarrow [\forall \epsilon > 0, \exists n_2 = n_2(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall n : (n \geq n_2 \Longrightarrow |W_n - l| < \epsilon)] .$$

Posons $n_0 = \max(n_1, n_2)$, alors $\forall n \geq n_0$

$$\begin{aligned} n \geq n_0 &\Longrightarrow l - \epsilon < V_n < l + \epsilon \text{ et } l - \epsilon < W_n < l + \epsilon \\ &\Longrightarrow l - \epsilon < V_n \leq U_n \leq W_n < l + \epsilon \\ &\Longrightarrow l - \epsilon < U_n < l + \epsilon. \end{aligned}$$

Exemple Calculer $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{n}$.

$$\begin{aligned} &-\tfrac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \tfrac{1}{n} \\ &\Longrightarrow 0 = \lim_{n\to+\infty} \left(-\tfrac{1}{n}\right) \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n} \leq \lim_{n\to+\infty} \tfrac{1}{n} = 0 \\ &\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n} = 0. \end{aligned}$$

Opérations arithmétiques sur les limites

Soient $(U_n), (V_n)$ deux suites convergentes, alors les suite $(U_n \pm V_n), (U_n.V_n), (\lambda U_n)$ et $\left(\dfrac{U_n}{V_n}\right)$, $(V_n \neq 0)$ sont convergentes et de plus

1. $\lim_{n\to\infty} (U_n \pm V_n) = \lim_{n\to\infty} U_n \pm \lim_{n\to\infty} V_n$.
2. $\lim_{n\to\infty} (U_n.V_n) = \lim_{n\to\infty} U_n . \lim_{n\to\infty} V_n$.
3. $\lim_{n\to\infty} (\lambda.U_n) = \lambda. \lim_{n\to\infty} U_n$.
4. $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{U_n}{V_n}\right) = \dfrac{\lim_{n\to\infty} U_n}{\lim_{n\to\infty} V_n}$, si $\lim_{n\to\infty} V_n \neq 0$.
5. $\lim_{n\to\infty} |U_n| = |\lim_{n\to\infty} U_n|$.

Pour démontrer ce théorème, on démontre le lemme suivant :
Pour que $\lim_{n\to\infty} U_n = l$ il faut et il suffit que $U_n = l + \alpha_n$ tel que $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Preuve 16 *On suppose que $\lim_{n\to\infty} U_n = l$ et on démontre que $U_n = l + \alpha_n$ tel que $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.*

$$\lim_{n\to\infty} U_n = l \Longleftrightarrow [\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall n : (n \geq n_0 \Longrightarrow |U_n - l| < \epsilon)] .$$

Posons $U_n - l = \alpha_n$, *alors*

$$\forall n : (n \geq n_0 \Longrightarrow |\alpha_n| < \epsilon) \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0.$$

Alors $U_n = l + \alpha_n$ *avec* $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

On suppose que $U_n = l + \alpha_n$ *tel que* $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ *et on démontre* $\lim_{n\to\infty} U_n = l$.

$$\begin{array}{rcl} \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 & \Longleftrightarrow & [\forall\epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall n : (n \geq n_0 \Longrightarrow |\alpha_n| < \epsilon)] \\ & \Longrightarrow & [\forall\epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall n : (n \geq n_0 \Longrightarrow |U_n - l| < \epsilon)] \\ & \Longrightarrow & \lim_{n\to\infty} U_n = l. \end{array}$$

Démonstration du Théorème

Démontrons (2) : $\lim_{n\to\infty}(U_n.V_n) = \lim_{n\to\infty} U_n . \lim_{n\to\infty} V_n$. On a grâce au lemme précédent

$$\lim_{n\to\infty} U_n = l_1 \Longleftrightarrow U_n = l_1 + \alpha_n \text{ tel que } \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$

et

$$\lim_{n\to\infty} V_n = l_2 \Longleftrightarrow V_n = l_2 + \beta_n \text{ tel que } \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0.$$

Par suite

$$\begin{array}{rcl} U_n.V_n & = & (l_1 + \alpha_n)(l_2 + \beta_n) \\ & = & l_1.l_2 + l_1\beta_n + l_2\alpha_n + \alpha_n\beta_n \\ & & \text{avec } \lim_{n\to\infty}(l_1\beta_n + l_2\alpha_n + \alpha_n\beta_n) = 0. \end{array}$$

D'où $\lim_{n\to\infty}(U_n.V_n) = l_1.l_2 = \lim_{n\to\infty} U_n . \lim_{n\to\infty} V_n$.

Exemple : $\lim_{n\to\infty} \dfrac{7n^2+15n+13}{4n^2+10n+23}$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$$\begin{array}{rcl} \lim_{n\to\infty} \dfrac{7n^2+15n+13}{4n^2+10n+23} & = & \lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2\left(7+\frac{15}{n}+\frac{13}{n^2}\right)}{n^2\left(4+\frac{10}{n}+\frac{23}{n^2}\right)} \\ & = & \lim_{n\to\infty} \dfrac{\left(7+\frac{15}{n}+\frac{13}{n^2}\right)}{\left(4+\frac{10}{n}+\frac{23}{n^2}\right)} \\ & = & \frac{7}{4}. \end{array}$$

Limites remarquables

Théorème 4.4 *On a*

1. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \; (a > 0)$.
2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p} = 1 \quad (\forall p \in \mathbb{N})$.
3. $\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 \text{ si } |q| < 1 \\ +1 \text{ si } q = 1 \\ n'\text{existe pas si } q = -1 \\ \infty \text{ si } |q| > 1. \end{cases}$
4. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0 \; (k \in \mathbb{N}, a > 1)$.
5. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0 \quad (a \in \mathbb{R})$.
6. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.
7. $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \quad (2 < e < 3)$.

Preuve 17 *1. Soit* $a > 1$, *alors* $\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n$ *avec* $\alpha_n > 0$. *Alors*

$$\begin{array}{rcl} a = (1+\alpha_n)^n & = & 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 + ... + C_n^n\alpha_n^n \\ & > & 1 + n\alpha_n. \end{array}$$

Par suite

$$\begin{array}{rcl} a - 1 > n\alpha_n & \Longrightarrow & 0 < \alpha_n < \frac{a-1}{n} \\ & \Longrightarrow & \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0. \end{array}$$

Ce qui montre que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Lorsque $0 < a < 1$, *on bose* $a = \frac{1}{b}$ *et donc* $b > 1$. *Ainsi*

$$\begin{array}{rcl} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} & = & \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{b}} \\ & = & \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b}} = \frac{1}{1} = 1. \end{array}$$

3. Soit $|q| < 1$

$$\begin{array}{rcl} \lim_{n\to\infty} q^n = 0 & \Longleftrightarrow & [\forall\epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall n : (n \geq n_0 \Longrightarrow |q|^n < \epsilon)] \\ & \Longrightarrow & n \log|q| < \log\epsilon \\ & \Longrightarrow & n > \frac{\log\epsilon}{\log|q|}, \end{array}$$

et il suffit de prendre $n_0 = E\left(\frac{\log\epsilon}{\log|q|}\right) + 1$.

Si $q = 1$, *alors* $q^n = 1$ *et* $\lim_{n\to\infty} q^n = 1$.

Si $q = -1$, *alors* $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ *n'existe pas.*

Si $|q| > 1$, *alors* $|q| = \frac{1}{p}$ *avec* $0 < p < 1$ *et*

$$\lim_{n\to\infty} |q|^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} p^n} = +\infty.$$

7. $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, $(2 < e < 3)$ *sera démontrée ci-dessous.*

Généralisation :

a) Montrons que $\lim_{n\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. *On pose* $n = -m$, *alors* $n \to -\infty \Longleftrightarrow m \to +\infty$

$$\begin{array}{rcl} \lim_{n\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n & = & \lim_{m\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m} \\ & = & \lim_{m\to+\infty} \left(\frac{m-1}{m}\right)^{-m} \\ & = & \lim_{m\to+\infty} \left(\frac{m}{m-1}\right)^{m} \\ & = & \lim_{m\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{m} \\ & = & \lim_{m\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{m-1} \left(1 + \frac{1}{m-1}\right) \\ & = & e.1 = e. \end{array}$$

Et en général, si $\lim_{n\to+\infty} p_n = \pm\infty$, *alors* $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e$ *ou plus généralement,*

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \pm\infty et \lim_{n\to+\infty} q_n = l \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{q_n p_n} = e^l.$$

Exemple 4.2 *Calculer* $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3n^2 + 5n + 1}{3n^2 + 3n + 1}\right)^n$

$$\begin{array}{rcl} \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3n^2 + 5n + 1}{3n^2 + 3n + 1}\right)^n & = & \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{3n^2 + 5n + 1}{3n^2 + 3n + 1} - 1\right)^n \\ & = & \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{2n}{3n^2 + 3n + 1}\right)^n \\ & = & \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3n^2+3n+1}{2n}}\right)^n \\ & = & \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3n^2+3n+1}{2n}}\right)^{\frac{3n^2+3n+1}{2n} \cdot \frac{2n^2}{3n^2+3n+1}} \\ & = & e^{\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2}{3n^2+3n+1}} \\ & = & e^{\frac{2}{3}}. \end{array}$$

4.3 Critères de convergence

4.3.1 Suites monotones

Définition 4.4 *Une suite* (U_n) *est dite croissante (resp. décroissante) si* $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq U_{n+1}$ *(resp.* $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq U_{n+1}$*). Les suites croissantes et les suites décroissantes sont dites monotones.*

Théorème 4.5 *Toute suite croissante, majorée (resp. décroissante, minorée) est convergente et de plus*

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \sup U_n \quad (resp. \lim_{n\to\infty} U_n = \inf U_n).$$

Preuve 18 *On a*

$$\begin{array}{rcl} (U_n) \text{ est majorée} & \Longrightarrow & \exists \sup U_n = M_0 \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} 1.\ \forall n \in \mathbb{N} \quad U_n \leq M_0 \\ 2.\ \forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, M_0 - \epsilon < U_{n_0} \leq M_0, \end{array} \right. \\ & \Longrightarrow & \forall n; n \geq n_0 \Longrightarrow M_0 - \epsilon < U_{n_0} \leq U_n \leq M_0 < M_0 + \epsilon \\ & & \text{(car } (U_n) \text{ est croissante).} \\ & \Longrightarrow & \forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n; n \geq n_0 \Longrightarrow |U_n - M_0| < \epsilon \\ & \Longleftrightarrow & \lim_{n\to\infty} U_n = M_0 = \sup U_n. \end{array}$$

Exemple 4.3 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,\ \ (2<e<3)$? *Démontrons que la suite* $U_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *est majorée, en effet*

$$\begin{array}{rcl} U_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n & = & \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{n^k} \\ & = & \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(n-k))}{k!}\frac{1}{n^k} \\ & = & 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) \\ & & +...+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{(n-(n-1))}{n}\right). \end{array}$$

Ce qui montre que

$$U_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > U_n$$

et par suite (U_n) *est croissante. Il est clair que* $U_n>2$, *montrons que* $U_n<3, \forall n$. *On a*

$$\begin{array}{rcl} 1-\frac{1}{n} & < & 1, \\ 1-\frac{2}{n} & < & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1-\frac{n-(n-1)}{n} & < & 1. \end{array}$$

Par suite,

$$\begin{array}{rcl} U_n & < & 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!} \\ & < & 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}} \\ & < & 2+\frac{1}{2}++...+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+... \\ & = & 2+\frac{1}{2}.\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3. \end{array}$$

De cette façon, on a démontré que $2<U_n<3$. (U_n) *est croissante et majorée donc elle est convergente. C'est à dire* $\lim_{n\to\infty} U_n$ *existe. Euler a proposé d'écrire*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,\ \ (2<e<3)\,.$$

4.3.2 Suites adjacentes

Définition 4.5 *Deux suites* (U_n) *et* (V_n) *sont dites adjacentes si l'une croît, l'autre décroît et* $\lim_{n\to+\infty}(U_n-V_n)=0$.

Théorème 4.6 *Deux suites adjacentes sont convergentes et convergent vers la même limite.*

Preuve 19 *On suppose que* (U_n) *est croissante et que* (V_n) *est décroissante et de plus* $\lim_{n\to+\infty}(U_n-V_n)=0$. *et on démontre que* (U_n) *et* (V_n) *sont convergentes et que* $\lim_{n\to+\infty}(U_n)=\lim_{n\to+\infty}(V_n)$. *Montrons d'abord, que* (V_n-U_n) *est une suite décroissante. En effet,*

$$(V_{n+1}-U_{n+1})-(V_n-U_n)=(V_{n+1}-V_n)-(U_{n+1}-U_n)<0,$$

alors (V_n-U_n) *est une suite décroissante.*

D'autre part :

$$\begin{array}{rcl} \lim_{n\to+\infty}(V_n-U_n)=0 & \Longrightarrow & \inf(V_n-U_n)=0 \\ & \Longrightarrow & V_n-U_n\geq 0, \forall n \\ & \Longrightarrow & V_n\geq U_n, \forall n. \end{array}$$

Et donc,

$$U_0\leq ...\leq U_n\leq U_{n+1}\leq ...\leq V_{n+1}\leq ...\leq V_0.$$

On a (U_n) *est croissante et majorée par* V_0, (V_n) *est décroissante et minorée par* U_0 *donc* (U_n) *et* (V_n) *sont convergentes, d'où*

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \lim_{n\to+\infty}(V_n-U_n) \\ & = & \lim_{n\to+\infty}(V_n)-\lim_{n\to+\infty}(U_n) \\ & \Longrightarrow & \lim_{n\to+\infty}(V_n)=\lim_{n\to+\infty}(U_n)\,. \end{array}$$

Application : Théorème des segments emboîtés

Théorème 4.7 *Soit une suite de segments* $I_n=[u_n,v_n]$ *vérifiant les conditions suivantes :*

1) $I_{n+1}\subset I_n\ \forall n\geq 0$.

2) $\lim_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=0$.

Alors, il existe un seul point c *appartenant à tous les segments* I_n, *i.e.*, $\cap_{n=1}^{\infty} I_n=\{c\}$.

Preuve 20 *On a* (u_n) *est croissante et que* (v_n) *est décroissante et* $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty}(u_n) = \lim_{n\to+\infty}(v_n) = c$.

Ce qui implique que

$$u_n \leq c \leq v_n, \forall n \geq 1.$$

Démontrons que c *est unique, en effet : supposons par l'absurde qu'il existe* $c' > c : \cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c'\}$. *Comme* $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ *et pour* $\epsilon = c' - c > 0$

$$\begin{aligned} \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall n : n \geq n_0 &\Longrightarrow |u_n - v_n| < \epsilon \\ &\Longrightarrow |u_n - v_n| < c' - c \text{ (contradiction)}. \end{aligned}$$

Donc il n'existe pas $c' \neq c$ *tel que* $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c'\}$.

4.3.3 Suites de Cauchy

Définition 4.6 *On dit que la suite* (U_n) *est de Cauchy si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q : p \geq n_0, q \geq n_0 \Longrightarrow |U_p - U_q| < \epsilon.$$

(La négation) :

Une suite (U_n) *n'est pas de Cauchy si :*

$$\exists \epsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists p, q : p \geq n_0, q \geq n_0 \text{et } |U_p - U_q| \geq \epsilon.$$

Théorème 4.8 *Toute suite convergente est de Cauchy.*

Preuve 21 *On suppose que* (U_n) *converge et on démontre qu'elle est de Cauchy.*

$$\begin{aligned} &(U_n) \text{ converge} \\ &\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = l \\ &\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, p \geq n_0 \Longrightarrow |U_p - l| < \tfrac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

et pour $q \geq n_0 \Longrightarrow |U_q - l| < \frac{\epsilon}{2}$.

D'où

$$\begin{aligned} |U_p - U_q| &= |(U_p - l) + (l - U_q)| \\ &\leq |U_p - l| + |l - U_q| \\ &< \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

et la suite (U_n) *est de Cauchy.*

Exemple 4.4 *Soit la suite* $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$, *étudier sa nature.*

Soient p, q *deux entiers tels que* $p \geq q$ *(par exemple). On a*

$$\begin{aligned} |U_p - U_q| &= \left|1 + ... + \tfrac{1}{q} + \tfrac{1}{q+1} + ... + \tfrac{1}{p} - 1 - ... - \tfrac{1}{q}\right| \\ &= \left|\tfrac{1}{q+1} + \tfrac{1}{q+1} ... + \tfrac{1}{p}\right|. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{q+1} + \tfrac{1}{q+1} ... + \tfrac{1}{p} &> \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{p} ... + \tfrac{1}{p} \\ &= \tfrac{p-q}{p}. \end{aligned}$$

Donc, pour $p = 2q$, *on aura* $|U_p - U_q| > \frac{2q-q}{2q} = \frac{1}{2}$. *Donc*

$$\exists \epsilon = \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}, \exists p = 2n, q = n : p \geq n, q \geq n \Longrightarrow |U_p - U_q| \geq \epsilon,$$

alors la suite (U_n) *n'est pas de Cauchy et donc elle n'est pas convergente.*

4.3.4 Sous-suites, suites extraites

Soient (U_n) une suite et $n \longmapsto n_k$ une suite strictement croissante d'entiers naturels alors la suite (U_{n_k}) est dite sous-suite ou suite extraite de (U_n).

Exemple : Soit la suite définie par $U_n = \dfrac{1}{n}; n \geq 1$. Les suites $(U_{2n}), (U_{2^n}), (U_{2n+1}), (U_{3n})$ sont des suites extraites de la suite (U_n).

Théorème 4.9 *Toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.*

Preuve 22 *On a*

$$\begin{array}{l} (U_n) \text{ converge} \\ \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = l \\ \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, n \geq n_0 \Longrightarrow |U_n - l| < \epsilon. \end{array}$$

Soit (U_{n_k}) *une suite extraite de* (U_n)*, montrons que* $\lim_{n\to+\infty} U_{n_k} = l$.

$$\lim_{k\to+\infty} n_k = +\infty \Longleftrightarrow \forall n_0, \exists q \in \mathbb{N}, \forall k; k \geq q \Longrightarrow n_k > n_0.$$

Or

$$\begin{array}{rcl} n_k > n_0 & \Longrightarrow & |U_{n_k} - l| < \epsilon \\ & \Longrightarrow & \lim_{n\to+\infty} U_{n_k} = l. \end{array}$$

4.3.5 Suites récurrentes

Définition 4.7 *La suite* (U_n) *est dite récurrente si*

1. U_0 *est donné.*
2. *Il existe une fonction* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}, (X \subset \mathbb{R})$ *telle que* $f(X) \subset X$ *et* $U_{n+1} = f(U_n)$.

Proposition 4.2 *1. Si la fonction* f *est croissante, alors*

i) $f(U_0) - U_0 \geq 0 \Longrightarrow (U_n)$ *est croissante.*

ii) $f(U_0) - U_0 \leq 0 \Longrightarrow (U_n)$ *est décroissante.*

2. Si f *est décroissante, alors les deux sous-suite* (U_{2n}) *et* (U_{2n+1}) *sont monotones au sens contraires.*

Preuve 23 *Soit* f *une fonction croissante et on suppose de plus que* $f(U_0) - U_0 \geq 0$

$$\begin{array}{rcl} f(U_0) - U_0 \geq 0 & \Longrightarrow & U_1 - U_0 \geq 0 \\ & \Longrightarrow & U_1 \geq U_0 \\ & \Longrightarrow & f(U_1) \geq f(U_0), \text{ car } f \text{ est croissante.} \\ & \Longrightarrow & U_2 \geq U_1. \end{array}$$

Par récurrence on obtient que (U_n) *est croissante.*

Théorème 4.10 *Si* (U_n) *est une suite récurrente par une fonction* f *continue dans* X *et* (U_n) *est convergente, c'est à dire* $\lim_{n\to+\infty} U_n = l$*, alors* l *est solution de l'équation* $f(l) = l$.

Preuve 24 *Celà découle de la définition d'une fonction continue.*

Exemple 4.5 *Etudier la nature de la suite récurrente définie par*

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{6 + U_n}, n \geq 0. \end{cases}$$

On a $U_0 = 0, U_1 = \sqrt{6} \Longrightarrow U_0 < U_1$*. On suppose que* $U_{n-1} < U_n$ *et on démontre que* $U_n < U_{n+1}$*. On a*

$$\begin{array}{rcl} U_{n+1} - U_n & = & \sqrt{6 + U_n} - \sqrt{6 + U_{n-1}} \\ & = & \dfrac{U_n - U_{n-1}}{\sqrt{6 + U_n} - \sqrt{6 + U_{n-1}}} > 0. \end{array}$$

Alors la suite (U_n) *est croissante. Supposons que* $U_n < 3$*, alors*

$$\begin{array}{rcl} U_{n+1} - 3 & = & \sqrt{6 + U_n} - 3 \\ & = & \dfrac{U_n - 3}{3 + \sqrt{6 + U_n}} < 0 \\ & \Longrightarrow & U_{n+1} < 3. \end{array}$$

(U_n) *est croissante et majorée donc elle est convergente. Soit* l *sa limite, alors d'après le théorème précédent* l *vérifie l'équation* $f(l) = l$.

$$\begin{array}{rcl} f(l) = l & \Longleftrightarrow & l = \sqrt{l + 6} \\ & \Longleftrightarrow & l^2 - l - 6 = 0 \\ & \Longrightarrow & \begin{cases} l = 3 \\ ou \\ l = -2 \text{ (exclue car } l > 0) \end{cases} \\ & \Longrightarrow & l = 3. \end{array}$$

Chapitre 5

Fonctions réelles d'une variable réelle

5.1 Généralités

Définition 5.1 *On appelle fonction numérique définie dans un domaine X toute application f telle que à chaque point x de X, on fait correspondre un seul élément y de $\mathbb{R}$. Et on écrit*

$$f: \begin{array}{ccc} X & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = y. \end{array}$$

X est le domaine de définition de f.

$f(X) = \operatorname{Im} f = \{y \in \mathbb{R}, \exists x \in X; f(x) = y\}$ *est l'ensemble des valeurs de f oubien ensemble image de f.*

Graphe d'une fonction

On appelle graphe d'une fonction f le lieu géométrique des points $M(x,y)$ où $x \in X$ et $y = f(x)$ et on écrit

$$G_f = \{(x,y), x \in X, y = f(x)\}.$$

Opérations sur les fonctions réelles

Soient $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

Egalité et inégalité

1. On dit que f est égale à g et on écrit

$$f = g \Longleftrightarrow f(x) = g(x), \ \forall x \in X.$$

2. On dit que f est inférieure ou égale à g et on écrit

$$f \leq g \Longleftrightarrow f(x) \leq g(x), \ \forall x \in X.$$

3. On dit que f est supérieure ou égale à g et on écrit

$$f \geq g \Longleftrightarrow f(x) \geq g(x), \ \forall x \in X.$$

Opérations arithmétiques :

1. La somme : $(f+g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in X$.
2. Le prouit : $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \forall x \in X$.
3. Le rapport $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, \forall x \in X, g(x) \neq 0$.

Composition de fonctions

Soient $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$, avec $f(X) \subset Y$. On définit la fonction composée de f et g et on note $g \circ f$ la fonction définie sur X par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \ \forall x \in X.$$

Exemple

Soient $f(x) = \cos x$, $g(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 = \cos^2 x$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \cos(g(x)) = \cos x^2$.

Il est clair que $f \circ g \neq g \circ f$.

Propriétés générales des fonctions :

a) Fonctions paires et impaires :

Un ensemble $X \subset \mathbb{R}$, est dit symétrique par rapport à l'origine si : $\forall x \in X \Longrightarrow -x \in X$.

Définition 5.2 *La fonction f définie dans l'ensemble symétrique X est dite*
i) paire si : $\forall x \in X, f(x) = f(-x)$.
ii) impaire si : $\forall x \in X, f(-x) = -f(x)$.

b) Fonctions périodiques
$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite périodique si $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que
i) $x + \alpha \in X$,
ii) $f(x+\alpha) = f(x)\ \forall x \in X$.
Et il est évident que $f(x + k\alpha) = f(x), k \in \mathbb{N}^*$.

Définition 5.3 *On appelle période de f le plus petit nombre positif T tel que $f(x+T) = f(x)\ \forall x \in X$.*

c) Fonctions monotones
Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, f est dite
i) croissante si $\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
ii) strictement croissante si $\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
iii) décroissante si $\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
iv) strictement décroissante si $\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

d) Fonctions bornées
La fonction f est dite
i) majorée sur X si $\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M, \forall x \in X$.
ii) minorée sur X si $\exists m \in \mathbb{R} : f(x) \geq m, \forall x \in X$.
iii) bornée sur X si elle est majorée et minorée simultanément, c'est à dire

$$\left| \begin{array}{l} \exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq f(x) \leq M, \forall x \in X \text{ ou} \\ \exists c \in \mathbb{R}_+, |f(x)| \leq c,\ \forall x \in X. \end{array} \right|$$

Définition 5.4 *On appelle borne supérieure (resp. inférieure) de f sur X le plus petit majorant (resp. le plus grand minorant) de f et on écrit*

$$\sup_{x\in X} f(x) = M \Longleftrightarrow \begin{cases} 1.\ \forall x \in X \quad f(x) \leq M \\ 2.\ \forall \epsilon > 0, \exists x_0 \in X, M - \epsilon < f(x_0), \end{cases}$$

$$\inf_{x\in X} f(x) = m \Longleftrightarrow \begin{cases} 1.\ \forall x \in X \quad m \leq f(x) \\ 2.\ \forall \epsilon > 0, \exists x_0 \in X, f(x_0) < m + \epsilon. \end{cases}$$

Théorème 5.1 *Toute fonction majoée (resp. minorée) admet une borne supérieure (resp. inférieure).*

Maximum et minimum d'une fonction

Définition 5.5 *On dit que admet un maximum (resp. minimum) au point $x_0 \in X$ si*

$$\forall x \in X, f(x) \leq f(x_0) \ \ \textit{(resp. } f(x) \leq f(x_0)\textit{).}$$

Fonctions inverses
Soit $f : X \longrightarrow Y$, f est dite inversible s'il existe $g : Y \longrightarrow X$ telle que

$$(g \circ f)(x) = x \text{ et } (f \circ g)(y) = y.$$

La fonction g et dite inverse de f et on la désigne par f^{-1} et on écrit

$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Propriétés
Soit $f : X \longrightarrow Y$, inversible (bijective), alors
1. L'inverse de f^{-1} est f, c'est à dire $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.
2. Si f est impaire (resp. paire) alors f^{-1} est impaire (resp. paire).
3. Si f est strictement monotone, alors f^{-1} l'est aussi.

Graphe d'une fonction inverse
Soient G_f le graphe d'une fonction inversible et

$$G_{f^{-1}} = \left\{ \left(y, f^{-1}(y)\right), y \in Y \right\}$$

le graphe de f^{-1}, alors

$$\begin{aligned} (x, y) \in G_{f^{-1}} &\Longleftrightarrow x = f^{-1}(y), y \in Y \\ &\Longleftrightarrow y = f(x), x \in X \\ &\Longleftrightarrow (x, y) \in G_f. \end{aligned}$$

G_f et $G_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.

5.2 Limite d'une fonction

Limite finie d'une fonction

Définition 5.6 *Soit f une fonction définie dans un voisinage de x_0 sauf peut être en x_0. Le nombre l est dit limite de f lorsque x tend vers x_0 et on écrit $l = \lim_{x\to x_0} f(x)$ si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0, \forall x \in V(x_0), (0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon).$$

Exemple :

Démontrer que $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$. En effet, on a $|\sin x - 0| = |\sin x| \leq |x|$. donc

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \epsilon > 0, \forall x, (0 < |x| < \delta \Longrightarrow |\sin x - 0| < \epsilon).$$

Définition 5.7 *Le nombre l est dit limite de f lorsque x tend vers x_0 si et seulement si pour toute suite (x_n) de $V^0(x_0)$ (voisinage épointé de x_0) convergente vers x_0, la suite $y_n = f(x_n)$ converge vers l et on écrit $\forall (x_n) \in V^0(x_0), (\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = l)$.*

Remarque 5.1 *D'après la définition précédente, s'ils existent deux suites $(u_n), (v_n)$ convergeant vers x_0 telles que $\lim_{n\to\infty} f(u_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(v_n)$, alors la limite de f n'existe pas en x_0.*

Exemple 5.1 *Etudier la limite de $y = \sin \frac{\pi}{x}$ lorsque $x \to 0$.*
Soient $u_n = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $v_n = \frac{1}{2n+\frac{1}{2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors on a

$$f(u_n) = \sin n\pi = 0 \text{ et } f(v_n) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

D'où $\lim_{x\to 0} \sin \frac{\pi}{x}$ n'existe pas.

Extension de la notion de limite
a) Limites latérales en un point
Soit $V \subset \mathbb{R}$ un ensemble contenant l'intervalle $]a, x_0[$ (ou $]x_0, b[$)

Définition 5.8 *Le nombre $l \in \mathbb{R}$ est dit limite à droite (resp. à gauche) de f en x_0 si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0, \forall x \in V, (x - x_0 < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon)$$

(resp.

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0, \forall x \in V, (x_0 - x < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon)\text{).}$$

On désigne la limite à droite (resp. à gauche) par

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = f(x_0 + 0)$$

(resp.

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = f(x_0 - 0)\text{).}$$

Théorème 5.2

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Longleftrightarrow \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x).$$

a) Limite à l'infini

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in V(-\infty), (x < -A \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon)$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in V(+\infty), (x > A \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon).$$

c) Limite infinie

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in V(x_0), (0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > A),$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in V(x_0), (0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) < -A),$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in V(+\infty), (x > B \Longrightarrow f(x) > A).$$

Unicité de la limite

Théorème 5.3 *Si une fonction f admet une limite en x_0, alors cette limite est unique.*

Preuve 25 *On suppose que f admet deux limites l_1, l_2 en x_0, alors on a*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1 \iff \forall\epsilon > 0, \exists\delta_1 = \delta_1(\epsilon) > 0, \forall x \in V(x_0), \left(0 < |x - x_0| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - l_1| < \frac{\epsilon}{2}\right)$$

et

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_2 \iff \forall\epsilon > 0, \exists\delta_2 = \delta_2(\epsilon) > 0, \forall x \in V(x_0), \left(0 < |x - x_0| < \delta_2 \Longrightarrow |f(x) - l_2| < \frac{\epsilon}{2}\right).$$

On pose $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, donc pour $0 < |x - x_0| < \delta$ on a

$$\begin{array}{rcl} |l_1 - l_2| & = & |(l_1 - f(x)) + (f(x) - l_2)| \\ & \leq & |l_1 - f(x)| + |f(x) - l_2| \\ & < & \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{array}$$

finalement $l_1 = l_2$.

Théorème 5.4 ***(propriétés locales)***
Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, alors il existe un voisinage du point x_0 dans lequel f est bornée, i.e.

$$\exists V(x_0) : \forall x \in V(x_0), |f(x)| \leq M.$$

Passage à la limite dans les inégalités :

Théorème 5.5 *Soient f, g deux fonctions définies dans un voisinage de x_0 et telle que $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$ et $l_1 < l_2$. Alors il existe un voisinage du point x_0 dans lequel $f(x) \leq g(x)$.*

Preuve 26 *On a*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1 \iff \forall\epsilon > 0, \exists\delta_1 = \delta_1(\epsilon) > 0, \forall x \in V(x_0), (0 < |x - x_0| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - l_1| < \epsilon)$$

et

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2 \iff \forall\epsilon > 0, \exists\delta_2 = \delta_2(\epsilon) > 0, \forall x \in V(x_0), (0 < |x - x_0| < \delta_2 \Longrightarrow |g(x) - l_2| < \epsilon).$$

On pose $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, et soit $l_1 < l < l_2$. En prenant $\epsilon = l - l_1 > 0$ dans la première équivalence (resp. $\epsilon = l_2 - l > 0$ dans la deuxième) on obtient pour $0 < |x - x_0| < \delta$

$$f(x) < l \text{ et } g(x) > l.$$

D'où le résultat.

Corollaire 5.1 *Soit f une fonction définie dans un voisinage de x_0 et telle que $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ et $f(x) > a$ alors $l \geq a$.*

Critère de la fonction intermédiaire

Théorème 5.6 *Soient f, g, h trois fonctions définies dans un voisinage de x_0 et telle que*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in V^0(x_0).$$

Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = l$ alors $\lim_{x\to x_0} g(x) = l$.

Preuve 27 *On a*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \iff \forall(x_n) \in V^0(x_0), \left(\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = l\right)$$

et

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = l \iff \forall(x_n) \in V^0(x_0), \left(\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} h(x_n) = l\right).$$

On a aussi

$$f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n) \quad \forall x_n \in V^0(x_0)$$

et le résultat découle du théorème des trois suites.

Exemple 5.2 *Etudier la limite de $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ en 0. On a $\forall x \in \mathbb{R}^*$*

$$-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1 \iff \begin{cases} -x \leq x\sin\frac{1}{x} \leq x \text{ si } x > 0 \\ x \leq x\sin\frac{1}{x} \leq -x \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

En utilisant le théorème précédent, on obtient $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$.

Opérations sur les limites :

Soient f, g deux fonctions définies dans un voisinage de x_0 et telle que $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$, alors on a

1. $\lim_{x\to x_0} (f \pm g)(x) = l_1 \pm l_2$.
2. $\lim_{x\to x_0} (f \cdot g)(x) = l_1 \cdot l_2$.
3. $\lim_{x\to x_0} (\lambda f)(x) = \lambda l_1$.
4. $\lim_{x\to x_0} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{l_1}{l_2}$, si $\lim_{x\to x_0} (g)(x) \neq 0$.
5. $\lim_{x\to x_0} (|f|)(x) = |l_1|$.

Démonstration

Prouvons (4) par exemple. On a

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1 \Longleftrightarrow \forall (x_n) \in V^0(x_0), \left(\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = l_1\right)$$

et

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2 \Longleftrightarrow \forall (x_n) \in V^0(x_0), \left(\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} g(x_n) = l_2\right).$$

D'après le théorème de la limite du rapport de deux suites, on trouve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{\lim_{n\to\infty} f(x_n)}{\lim_{n\to\infty} g(x_n)} = \frac{l_1}{l_2}$$

et le résultat en découle.

Exemple :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-4}-x\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x-4}{\left(\sqrt{x^2+3x-4}+x\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3-\frac{4}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}+1\right)}\\ &= \tfrac{3}{2}.\end{aligned}$$

5.3 Continuité d'une fonction

Fonctions continues

a) Définitions et propriétés

Définition 5.9 *On dit que $f : X \to \mathbb{R}$ est continue au point x_0 de X si $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, i.e.,*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0, \forall x \in V(x_0), (0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon).$$

Remarque 5.2 *Si f n'est pas définie en x_0, elle ne peut être continue en x_0.*

f est dite continue sur X si elle est continue en chaque point de X.

Exemple 5.3 $f(x) = |x|, x_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &= ||x| - |x_0||\\ &\leq |x - x_0|\end{aligned}$$

Donc il suffit de choisir $\delta = \epsilon$ dans la définition précédente.

Définition 5.10 ***(Caractérisation de la continuité à l'aide des suites numériques)***

On dit que $f : X \to \mathbb{R}$ est continue au point x_0 de X si $\forall (x_n) \in V(x_0), (\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0))$.

Exemple 5.4

$$f(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x}, & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

Soient $u_n = \frac{1}{2n\pi}, v_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, donc $f(u_n) = 1$ et $f(v_n) = 0$. Par suite, f n'est pas continue en 0.

Définition 5.11 ***(continuité à gauche et à droite)***

Une fonction définie en x_0 et à droite de x_0 (resp. et à gauche de x_0) est continue à droite (resp. et à gauche) de x_0 si $\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$ (resp. $\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$).

$$f \text{ est continue en } x_0 \Longleftrightarrow \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = f(x_0).$$

Exemple 5.5 *Soit la fonction h définie par*

$$h(x) = \begin{cases} 1, & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x \leq 0, \end{cases}$$

on a $h(0) = 0$.

$\lim_{\substack{> \\ x \to 0}} h(x) = 1 \neq h(0)$ *donc h n'est pas continue à droite de* 0.

$\lim_{\substack{< \\ x \to 0}} h(x) = 0 = h(0)$ *donc h est continue à gauch de* 0.

Finalement, h n'est pas continue en 0.

Opérations sur les fonctions continues

Proposition 5.1 *Soient f et g deux fonctions continues en x_0, alors*

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha f + \beta g$ *est continue en* x_0.
2. $f.g$ *est continue en* x_0.
3. *Si $g(x_0) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en* x_0.
4. $|f|$ *est continue en* x_0.

Continuité des fonctions composées

Proposition 5.2 *Soient $f : I \longrightarrow I'$ et $g : I' \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continue en x_0 et $f(x_0)$ respectivement. Alors $g \circ f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en x_0.*

Preuve 28 *Soit $(x_n) \subset I$ une suite convergeant vers $x_0 \in I$. Montrons que $(g \circ f)(x_n)$ converge vers $(g \circ f)(x_0)$. On a*

$$\begin{aligned} x_n \to x_0 &\Longrightarrow f(x_n) \to f(x_0) \ \ car\ f\ est\ continue\ en\ x_0 \\ &\Longrightarrow g(f(x_n)) \to g(f(x_0)) \ \ car\ g\ est\ continue\ en\ f(x_0) \\ & \quad\ (g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(x_0). \end{aligned}$$

Remarque 5.3 *f est dite discontinue en x_0 si*

a. f n'est pas définie en x_0

b. la limite existe mais différente de $f(x_0)$.

c. la limite n'existe pas.

Prolongement par continuité

Si f n'est pas définie en x_0 ($f$définie sur $I - \{x_0\}$) et $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, $l \in \mathbb{R}$, alors on définit un prolongement par continuité de f en x_0 par

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I - \{x_0\} \\ l \text{ si } x = x_0. \end{cases}$$

Exemple 5.6 $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, x \in \mathbb{R}^*$. *On a $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ et par suite*

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \neq 0 \\ l\ si\ x = 0 \end{cases}$$

est le prolongement par continuité de f en 0.

Continuité uniforme

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. f est dite uniformément continue sur D si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0, \forall x, x' \in D, (0 < |x - x'| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon).$$

Remarque 5.4 *1. La continuité uniforme sur D implique la continuité sur D. En effet, il suffit de poser $x' = x_0$ pour chaque x_0 fixé dans D.*

2. δ ne dépend que de ϵ, contrairement à la définition de la continuité où δ dépend aussi de x_0.

3. Une fonction continue sur D n'est pas forcément uniformément continue sur D. On va jusitifier celà à l'aide d'un exemple.

Exemple 5.7 $f(x) = \dfrac{1}{x}, x \in]0, 1]$. *On a f est continue sur $]0, 1]$, montrons que f n'est pas uniformément continue sur $]0, 1]$, i.e., montrons que*

$$\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, x' \in I, |x - x'| < \delta \ \ et\ \ |f(x) - f(x')| \geq \epsilon.$$

Prenons $\epsilon = 1$ et $\delta > 0$

Premier cas : $\delta \geq 1$

Pour $x = 1, x' = \frac{1}{3}$, *on a*

$$\begin{array}{l} |x - x'| = \left|1 - \frac{1}{3}\right| = \frac{2}{3} < 1 \leq \delta \\ \text{et } |f(x) - f(x')| = |1 - 3| = 2 > 1 = \epsilon. \end{array}$$

Deuxième cas : $0 < \delta < 1$

Pour $x = \delta, x' = \dfrac{\delta}{2}$, *on a*

$$\begin{array}{l} |x - x'| = \left|\delta - \frac{\delta}{2}\right| = \frac{\delta}{2} < \delta \\ \text{et } |f(x) - f(x')| = \left|\frac{1}{\delta} - \frac{2}{\delta}\right| = \frac{1}{\delta} > 1 = \epsilon. \end{array}$$

Finalement, f *n'est pas uniformément continue sur* $]0, 1]$.

Théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues

Théorème 5.7 *Soit* f *une fonction continue sur un intervalle fermé et borné* $[a, b]$, *alors* f *est uniformément continue sur* $[a, b]$.

Remarque 5.5 *S'agissant de la continuité uniforme, il est essentiel de préciser le domaine sur lequel on étudie la fonction.*

exemple : $f(x) = \dfrac{1}{x}, x \in [\epsilon, 1]$ *est uniformément conyinue* $\forall \epsilon > 0$.

Théorème 5.8 *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors*

1. f *est bornée.*
2. f *atteint ses bornes, i. e.,*

$$\begin{array}{l} \exists \alpha \in [a, b] : \sup_{x \in [a,b]} f(x) = f(\alpha) = M \\ \text{et } \exists \beta \in [a, b] : \inf_{x \in [a,b]} f(x) = f(\beta) = m. \end{array}$$

Théorème 5.9 ***(Théorème des valeurs intermédiaires)***

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que*

1. f *est continue sur* $[a, b]$,
2. $f(a) . f(b) < 0$.

Alors

$$\exists x_0 \in]a, b[: f(x_0) = 0.$$

Et si de plus f *est stictement monotone, alors le* x_0 *est unique.*

Exemple 5.8 *1.Montrer que* $\ln x - x = 0$ *admet une unique solution sur* $]1, 2[$.

On a $F(x) = \ln x - x$, F *est continue sur* $[1, 2]$.

$F(1) = \ln 1 - 1 = -1, F(2) = \ln 2 - \frac{1}{2} = 0,19.$

Le TVI, implique $\exists x_0 \in]1, 2[: F(x_0) = 0$, *cest à dire*

$$\exists x_0 \in]1, 2[: \ln x_0 - \frac{1}{x_0} = 0.$$

Unicité : $F'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$, *donc* F *est strictement croissante. Par suite la solution est unique.*

2. $f(x) = E(x) - \frac{1}{2}$, $x \in [0, 1]$. *Le TVI ne s'applique pas à* f *car elle n'est pas continue en* 1.

5.4 Dérivabilité d'une fonction

Fonctions dérivables

a) Définitions et propriétés

Définition 5.12 *Soient* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ *et* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction. On dit que* f *est dérivable en* x_0 *si* $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ *existe et finie. Cette limite est appelée dérivée de* f *en* x_0 *et est notée* $f'(x_0)$.

Une autre écriture de la dérivée en un point

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Exemple 5.9 *Soit la fonction définie par*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = x^3. \end{array}$$

Trouver la dérivée de f en un point x_0 de $\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{x^3-x_0^3}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)\left(x^2+x_0x+x_0^2\right)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \left(x^2+x_0x+x_0^2\right) = 3x_0^2. \end{aligned}$$

Dérivée à droite, dérivée à gauche

On définit la dérivée à droite de f en x_0 par

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

De même, on définit la dérivée à gauche de f en x_0 par

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Et

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \iff f'_d(x_0) = f'_g(x_0) = f'(x_0).$$

Exemple 5.10 *Soit la fonction définie par*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x \geq 0 \\ 1-2x & si\ x < 0, \end{cases} \end{array}.$$

on a $f(0) = 0+1$, f est-elle dérivale en 0 ? On a

$$\begin{aligned} f'_d(0) &= \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \\ &= \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} \frac{x+1-1}{x} \\ &= \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} \frac{x}{x} \\ &= 1. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f'_g(0) &= \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \\ &= \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} \frac{1-2x-1}{x} \\ &= \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} \frac{-2x}{x} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Finalement, f n'est pas dérivable en 0 car $f'_d(0) \neq f'_g(0)$.

Définition 5.13 *f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I et l'application*

$$\begin{array}{rccl} f': & I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

est appelée la fonction dérivée de f.

Interprétation géométrique de la dérivée

Soit f une fonction dérivable en x_0 et (C) la courbe représentative de f. L'équation de la tangente (Δ) à la courbe (C) au point $M(x_0, f(x_0))$ est

$$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0).$$

$f'(x_0)$ représente la pente de la droite tangente à la courbe (C) au point $M(x_0, f(x_0))$.

b) Dérivabilité et continuité

Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0. La réciproque est fausse en général.

Exemple : $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$. f est continue en 0 mais elle n'est pas dérivable en 0 car

$$f'_d(0) = 1 \neq -1)f'_g(0).$$

c) Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 5.3 *Soient f, g deux fonctions dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$, alors $(\alpha f), \alpha \in \mathbb{R}, f+g, f.g$ sont dérivable en x_0, et $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 si $g(x_0) \neq 0$. De plus*

1. $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$.
2. $(f+g)'(x_0) = (f)'(x_0) + (g)'(x_0)$.
3. $(f.g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + g'(x_0) f(x_0)$.
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0) g(x_0) - g'(x_0) f(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Dérivée d'une fonction composée

Proposition 5.4 *Soient $f : I \longrightarrow I'$ et $g : I' \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en x_0 et $f(x_0)$ respectivement. Alors $g \circ f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 et on a*

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0).g'(f(x_0)).$$

Preuve 29 *On a*

$$\begin{aligned}
(g \circ f)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} . \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} . \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= g'(y_0).f'(x_0) \\
&= f'(x_0).g'(f(x_0)).
\end{aligned}$$

Exemple 5.11 *Soient les fonctions f et g définies par*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = x^2, \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g(x) = \cos x. \end{array}$$

Alors

$$\begin{array}{rccl} g \circ f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (g \circ f)(x) = \cos x^2, \end{array}$$

et

$$\begin{aligned}
(g \circ f)'(x) &= f'(x).g'(f(x)) \\
& 2x. \sin x^2.
\end{aligned}$$

Dérivée d'une fonction réciproque

Proposition 5.5 *Si f est dérivable en x_0, alors f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et on a*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Preuve 30 *On a*

$$\begin{aligned}
\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) &= \left(f^{-1}\right)'(y_0) \\
&= \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \\
&= \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\dfrac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \\
&= \frac{1}{f'(x_0)}.
\end{aligned}$$

Exemple 5.12 *La fonction*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to &]0, +\infty[\\ & x & \longmapsto & f(x) = e^x, \end{array}$$

est bijective donc admet une application réciproque

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: &]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f^{-1}(x) = \ln x, \end{array}$$

avec

$$y = e^x \Longleftrightarrow \ln y = x.$$

On a

$$\begin{aligned} \left(f^{-1}\right)'(y) &= (\ln)'(y) \\ &= \frac{1}{f'(x)} \\ &= \frac{1}{e^x} \\ &= \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

Théorèmes fondamentaux sur les fonctions dérivables

Théorème 5.10 ***(Théorème de Rolle)***
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant
1. f est continue sur $[a,b]$,
2. f est dérivable sur $]a,b[$,
3. $f(a) = f(b)$. Alors,

$$\exists c \in \left]a,b\right[: f'(c) = 0.$$

Le théorème de Rolle nous affirme qu'il existe un point c en lequel la tangente est parallèle à l'axe des x.

Théorème 5.11 ***(Théorème de Lagrange ou des accroissements finis)***
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant
1. f est continue sur $[a,b]$,
2. f est dérivable sur $]a,b[$. Alors,

$$\exists c \in \left]a,b\right[: f(b) - f(a) = (b-a) f'(c).$$

Preuve 31 *Considérons la fonction $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par*

$$\forall x \in [a,b], g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

La fonction g est :
1. continue sur $[a,b]$ (resp. dérivable sur $]a,b[$) car c'est le produit et la somme de fonctions continues sur $[a,b]$ (resp. dérivables sur $]a,b[$)
2. $g(a) = 0, g(b) = 0$.
Et d'après le théorème de Rolle, $\exists c \in]a,b[: g'(c) = 0$. On a $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. D'où

$$\begin{aligned} &\exists c \in \left]a,b\right[: f'(c) - \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \\ \Longleftrightarrow\ &\exists c \in \left]a,b\right[: f(b) - f(a) = (b-a) f'(c). \end{aligned}$$

Le théorème de Lagrange nous affirme qu'il existe un point $c \in]a,b[$ en lequel la tangente à la courbe est parallèle à la droite joignant les deux points $(a, f(a)), (b, f(b))$.

Exemple 5.13 *Montrer à l'aide du théorème des accroissement finis que*

$$\forall x > 0, \sin x \leq x.$$

Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = t - \sin t.$$

La fonction f est :
continue sur $[0,x], \forall x > 0$ (resp. dérivable sur $]0,x[, \forall x > 0$) car c'est la somme de fonctions continues sur $[0,x]$ (resp. dérivables sur $]0,x[$).
Et d'après le théorème des accroissement finis,

$$\begin{aligned} &\exists c \in \left]0,x\right[: f(x) - f(0) = (x-0) f'(c) \\ \Longleftrightarrow\ &\exists c \in \left]0,x\right[: t - \sin t = x(1-\cos c). \end{aligned}$$

Comme $x > 0$ et $\cos c \leq 1$, on obtient $\forall x > 0, \sin x \leq x$.

Théorème 5.12 ***(Théorème de Cauchy)***
Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions vérifiant
1. f, g sont continues sur $[a,b]$,
2. f, g sont dérivables sur $]a,b[$. Alors,

$$\exists c \in]a,b[: \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Preuve 32 *Appliquer le théorème de Rolle à la fonction $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par*

$$\forall x \in [a,b], F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)).$$

Dérivée d'ordre supérieur

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I, alors f' est dite dérivée d'ordre 1 de f. Si f' est dérivable sur I alors sa dérivée est appelée dérivée d'ordre 2 de f. On la note f'' ou $f^{(2)}$

$$f^{(2)} = f'' = (f')'.$$

D'une manière générale, on définit la dérivée d'ordre n de f par

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)' \forall n \geq 1, \; f^{(0)} = f.$$

On dit que f est de classe C^1 sur I si f est dérivable sur I et f' est continue sur I. On dit que f est de classe C^n sur I (et on écrit $f \in C^n(I)$) si f est n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I.

f est dite de classe C^∞ sur I si elle est de classe $C^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Dérivée n$^{\text{ème}}$ d'un produit (formule de Leibniz)

Théorème 5.13 *Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ n fois dérivables, alors $f.g$ est n fois dérivable et on a $\forall x \in [a,b]$*

$$\begin{array}{l} (f.g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x)\, g^{(k)}(x) \\ \text{avec } C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}. \end{array}$$

Exemple 5.14 *Calculer $\left(x^3 \cos 4x\right)^{(4)}$. On a*

$$\begin{array}{rcl} \left(x^3\cos 4x\right)^{(4)} & = & \sum_{k=0}^{4} C_4^k (\cos 4x)^{(4-k)} \left(x^3\right)^{(k)} \\ & = & C_4^0 x^3 (\cos 4x)^{(4)} + C_4^1 \left(x^3\right)^{(1)} (\cos 4x)^{(3)} \\ & & +C_4^2 \left(x^3\right)^{(2)} (\cos 4x)^{(2)} + C_4^3 \left(x^3\right)^{(3)} (\cos 4x)^{(1)} \\ & & ++C_4^4 \left(x^3\right)^{(4)} (\cos 4x), \end{array}$$

continuez...

Application de la dérivée
a) Critère de monotonie

Proposition 5.6 *Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, dérivable sur I, alors*
1. $f' \geq 0$ sur $I \Leftrightarrow f$ est croissante sur I.
2. $f' \leq 0$ sur $I \Leftrightarrow f$ est décroissante sur I.

Preuve 33 *$\Longleftarrow$) Supposons que f est croissante sur I et montrons que $f' \geq 0$ sur I.*
Soit $x_0 \in I$, alors $\forall h \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0 & \Longrightarrow & \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0 \\ & \Longrightarrow & f'(x_0) \geq 0. \end{array}$$

$\Longrightarrow$) Supposons que $f' \geq 0$ sur I et montrons que f est croissante sur I.
Soient $x, y \in I : x < y$. Le théorème de Lagrange sur $[x,y]$ donne l'existence d'un point $c \in]x,y[: f(y) - f(x) = (y-x) f'(c)$. On a $f'(c) \geq 0$ et $(y-x) > 0$, celà implique que $f(x) < f(y)$.

Régles de l'Hospital
i) Première régle de l'Hospital

Théorème 5.14 *Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I, dérivables sur $I - \{x_0\}$ et vérifiant les conditions suivantes :*
1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$
2) $g'(x) \neq 0, \forall x \in I - \{x_0\}$,
alors

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Exemple 5.15

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

La réciproque est en général fausse.

Exemple 5.16 $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$, $g(x) = x$. *On a* $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} x \cos \frac{1}{x} = 0$. *Tandis que* $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \left(2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}\right)$ *n'existe pas car* $\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ *n'existe pas.*

Remarque 5.6 *La régle de l'Hospital est vraie lorsque $x \to +\infty$. En effet, posons* $x = \dfrac{1}{t}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{-1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{-1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right)} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.
\end{aligned}$$

Si $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{0}$ *et f', g' vérifient les conditions du théorème, alors on peut appliquer encore une fois la régle de l'Hospital.*

i) Deuxième régle de l'Hospital

Théorème 5.15 *Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I, dérivables sur $I - \{x_0\}$ et vérifiant les conditions suivantes :*
1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$
2) $g'(x) \neq 0, \forall x \in I - \{x_0\}$,
alors

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

La remarque précédente est vraie dans ce cas.

Exemple 5.17

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} \\
&= ... \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{n(n-1)...2\times 1x^0}{e^x} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

5.5 Applications aux fonctions élémentaires

5.5.1 Fonction inverse des fonctions trigonométriques

Fonction arc sinus

La fonction $f : \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, +1]$ définie par $f(x) = \sin x$ étant continue et strictement croissante sur $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ($f'(x) = \cos x > 0\ \forall x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$). Elle admet une fonction réciproque $f^{-1} : [-1, +1] \longrightarrow \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ appelée fonction **arc sinus** qui est continue et strictement croissante sur $[-1, +1]$. On la note arcsin. Ainsi

$$\begin{cases} y = \arcsin x \\ x \in [-1, +1] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \sin y \\ y \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} (\arcsin)'(x) &= \frac{1}{\cos y} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, |x| < 1. \end{aligned}$$

Fonction arc cosinus

La fonction $f : [0, \pi] \longrightarrow [-1, +1]$ définie par $f(x) = \cos x$ étant continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$ ($f'(x) = -\sin x > 0\ \forall x \in]0, \pi[$). Elle admet une fonction réciproque $f^{-1} : [-1, +1] \longrightarrow [0, \pi]$ appelée fonction **arc cosinus** qui est continue et strictement décroissante sur $[-1, +1]$. On la note arccos. Ainsi

$$\begin{cases} y = \arccos x \\ x \in [-1, +1] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \cos y \\ y \in [0, \pi] \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} (\arccos)'(x) &= \frac{1}{-\sin y} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}, |x| < 1. \end{aligned}$$

Fonction arc tangente

La fonction $f : \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \tan x$ étant continue et strictement croissante sur $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ($f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} > 0\ \forall x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$). Elle admet une fonction réciproque $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ appelée fonction **arc tangente** qui est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On la note arctan. Ainsi

$$\begin{cases} y = \arctan x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ y \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

et

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Fonction arc cotangente

La fonction $f :]0, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cot x$ étant continue et strictement décroissante sur $]0, \pi[$ ($f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x} > 0\ \forall x \in]0, \pi[$). Elle admet une fonction réciproque $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow]0, \pi[$ appelée fonction **arc cotangente** qui est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. On la note arccot. Ainsi

$$\begin{cases} y = \operatorname{arccot} x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \cot y \\ y \in]0, \pi[\end{cases}$$

et

$$(\operatorname{arccot})'(x) = \frac{-1}{1 + \cot^2 y} = \frac{-1}{1 + x^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Propriétés

$\forall x \in D_f, \sin(\arcsin x) = x$; $\cos(\arccos x) = x$; $\tan(\arctan x) = x$; $\cot(\operatorname{arccot} x) = x$.

Mais $\arcsin(\sin x) = x$ si $x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\arccos(\cos x) = x$ si $x \in [0, \pi]$; etc...

Formules (à démontrer)

1. $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$;
2. $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \dfrac{\pi}{2}$;
3. $\arcsin(-x) = -\arcsin x$;
4. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$;
5. $\arctan(-x) = -\arctan x$;
6. $\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x$;
7. $\cos(\arcsin x) = \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$;
8. $\cos(\arctan x) = \sin(\operatorname{arccot} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
9. $\sin(\arctan x) = \cos(\operatorname{arccot} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;
10. $\tan(\arccos x) = \cot(\arcsin x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$;
11. $\arccos\frac{1}{x} + \arcsin\frac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$.

5.5.2 Fonctions hyperboliques et leurs inverses

Fonction sinus hyperbolique

La fonction **sinus hyperbolique** est définie par

$$\begin{array}{rccl} \sinh: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}. \end{array}$$

Propriétés

$\sinh \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; $\lim_{x\to\pm\infty} \sinh = \pm\infty$.

Fonction cosinus hyperbolique

La fonction **cosinus hyperbolique** est définie par

$$\begin{array}{rccl} \cosh: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [1, +\infty[\\ & x & \longmapsto & \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{array}$$

Propriétés

cosh est une fonction paire, $(\cosh)'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\cosh \in C^\infty(\mathbb{R}, [1, +\infty[)$; $\lim_{x\to-\infty} \cosh x = +\infty, \lim_{x\to+\infty} \cosh x = +\infty$, cosh est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Fonction tangente hyperbolique

La fonction **tangente hyperbolique** est définie par

$$\begin{array}{rccl} \tanh: & \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1, +1[\\ & x & \longmapsto & \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \end{array}$$

Propriétés

tanh est une fonction impaire, $\tanh \in C^\infty(\mathbb{R},]-1, +1[)$; $(\tanh)'(x) = 1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}, \forall x \in \mathbb{R}; \lim_{x\to-\infty} \tanh x = -1, \lim_{x\to+\infty} \tanh x = +1$.

Fonction cotangente hyperbolique

La fonction **cotangente hyperbolique** est définie par

$$\begin{array}{rccl} \coth: & \mathbb{R}^* & \longrightarrow &]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\\ & x & \longmapsto & \coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{1}{\tanh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}. \end{array}$$

Propriétés

coth est une fonction impaire et est strictement décroissante et bijective de $\mathbb{R}^*$ dans $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. On a $\coth \in C^\infty(\mathbb{R}^*,]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[)$; $(\coth)'(x) = 1 - \coth^2 x = \dfrac{-1}{\sinh^2 x}, \forall x \in \mathbb{R}^*; \lim_{x\to-\infty} \coth x = -1, \lim_{x\to+\infty} \coth x = +1$, $\lim_{x\to-1^-} \coth x = -\infty, \lim_{x\to1^+} \coth x = +\infty$.

Propriétés des fonctions hyperboliques

$\cosh x + \sinh x = e^x$, $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$, $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$;

$\cosh(x+y) = \cosh x.\cosh y + \sinh x \sinh y$;

$\sinh(x+y) = \sinh x.\cosh y + \sinh y.\cosh x$;

$\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 - \tanh x.\tanh y}$;

$1 - \tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$; $\cosh(2x) = 2\cosh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x$.

Fonction argument sinus hyperbolique

La fonction sinh est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle admet une fonction réciproque f^{-1} : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ appelée fonction **argument sinus hyperbolique**. On la note $\arg\sinh$. Ainsi

$$\begin{cases} y = \arg\sinh x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \sinh y \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Propriétés

La fonction $\arg\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} (\arg\sinh)'(x) &= \frac{1}{\cosh y} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

D'où $\arg\sinh \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\lim_{x\to-\infty} \arg\sinh x = -\infty, \lim_{x\to+\infty} \arg\sinh x = +\infty$.

Une autre écriture de la fonction $\arg\sinh$: On a

$$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1 \Longrightarrow \cosh y = \sqrt{1+\sinh^2 y} = \sqrt{1+x^2}.$$

Donc

$$\cosh y + \sinh y = e^y = x + \sqrt{1+x^2}$$

et celà implique que

$$\arg\sinh x = y = \ln e^y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$$

Fonction argument cosinus hyperbolique

La fonction $f : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ définie par $f(x) = \cosh x$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Elle admet une fonction réciproque $f^{-1} : [1, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ continue et strictement croissante, appelée fonction **argument cosinus hyperbolique**. On la note $\arg\cosh$. Ainsi

$$\begin{cases} y = \arg\cosh x \\ x \in [1, +\infty[\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \cosh y \\ y \in [0, +\infty[. \end{cases}$$

Propriétés

La fonction $\arg\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} (\arg\cos)'(x) &= \frac{1}{\sinh y} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \forall x \geq 1. \end{aligned}$$

$\lim_{x\to+\infty} \arg\cosh x = +\infty$.

Une autre écriture de la fonction $\arg\cosh$: On a

$$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1 \Longrightarrow \sinh y = \sqrt{\cosh^2 y - 1} = \sqrt{x^2-1}.$$

Donc

$$\cosh y + \sinh y = e^y = x + \sqrt{x^2-1}$$

et celà implique que

$$\arg\cosh x = y = \ln e^y = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \forall x \geq 1.$$

Fonction argument tangente hyperbolique

La fonction $f : \mathbb{R} \to]-1, +1[$ définie par $f(x) = \tanh x$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle admet une fonction réciproque $f^{-1} :]-1, +1[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement croissante, appelée fonction **argument tangente hyperbolique**. On la note $\arg\tanh$. Ainsi

$$\begin{cases} y = \arg\tanh x \\ x \in]-1, +1[\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Propriétés

Une autre écriture de la fonction $\arg\tan$: On a pour $|x| < 1$

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}.$$

Donc

$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

et celà implique que

$$\arg\tan x = y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

$(\arg\tan)'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}, |x| < 1$ et $\lim_{x\to-1^+} \arg\tanh x = -\infty, \lim_{x\to+1^-} \arg\tanh x = +\infty.$
La fonction $\arg\tan \in C^\infty(]-1,+1[,\mathbb{R})$.

Fonction argument cotangente hyperbolique

La fonction

$$\begin{array}{rccl} \coth : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow &]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\\ & x & \longmapsto & \coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{1}{\tanh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \end{array}$$

est bijective, donc elle admet une fonction réciproque dite **argument cotangente hyperbolique**. On la note $\arg\coth$. Ainsi

$$\left\{\begin{array}{l} y = \arg\coth x \\ |x| > 1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \cot y \\ y \in \mathbb{R}^*. \end{array}\right.$$

Propriétés

On peut montrer que

$$\arg\coth x = y = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|, |x| > 1.$$

Chapitre 6

Formules de Taylor et développements limités

6.1 Formules de Taylor

Une fonction f continue sur $[a,b]$ et dérivable en $x_0 \in]a,b[$ peut s'écrire au voisinage de x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + (x - x_0) \epsilon(x)$$

avec $\lim_{x \to x_0} \epsilon(x)$. Celà revient à dire que f est approximée par un polynôme de degré 1

$$x \longmapsto P(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0).$$

L'erreur commise $R(x) = (x - x_0) \epsilon(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers x_0. La formule de Taylor généralise ce résultat à des fonctions n fois dérivables qui peuvent être approximées (au voisinage de x_0) par des polynômes de degré n. Plus exactement

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f^{(2)}(x_0) + ... + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)}_{P_n(x)} + R_n(x_0, x).$$

$P_n(x)$ est un polynôme de degré n en $(x - x_0)$ qui approxime f avec une précision R_n. Et $R_n(x_0, x)$ est appelé reste d'ordre n. Diverses formes de $R_n(x_0, x)$ existent, la forme la plus classique est la suivante :

6.1.1 Formule de Taylor avec reste de Lagrange

Théorème 6.1 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[a,b]$ ($f \in C^n([a,b])$) et $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a,b[$ et soit $x_0 \in [a,b]$, alors $\forall x \in [a,b], x \neq x_0, \exists c \in]a,b[$*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f^{(2)}(x_0) + ... + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

C'est la formule de Taylor d'ordre n avec reste de Lagrange $\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$.

6.1.2 Formule de Taylor Mac-Laurin

Lorsque $x_0 = 0$ dans la formule de Taylor-Lagrange, on pose $c = \theta x, 0 < \theta < 1, c \in]0, x[$ et on obtient

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f^{(2)}(0) + ... + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x).$$

Remarque 6.1 *La formule de Taylor Mac-Laurin est souvent utilisée dans le calcul des valeurs approchées.*

Exemple 6.1 *En utilisant la formule de Mac-Laurin d'ordre 2 à la fonction $x \longmapsto e^x$, montrer que l'on a $\frac{8}{3} < e < 3$.*

On a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} e^{\theta x}$$

et pour $x = 1$, $e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} e^{\theta}$, i. e., $e = \frac{5}{2} + \frac{1}{6} e^{\theta}$. En utilisant le fait que $0 < \theta < 1$, on obtient

$$\frac{8}{3} < \frac{5}{2} + \frac{1}{6} e^{\theta} < \frac{5}{2} + \frac{1}{6} e.$$

D'où

$$\begin{aligned} e < \tfrac{5}{2} + \tfrac{1}{6} e &\implies \tfrac{5}{6} e < \tfrac{5}{2} \\ &\implies e < 3. \end{aligned}$$

Finalement, $\frac{8}{3} < e < 3$.

6.1.3 Formule de Taylor Young

Nous allons restreindre les hypothèses en supposant uniquement que $f^{(n)}(x_0)$ existe.

Théorème 6.2 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in [a,b]$. Supposons que $f^{(n)}(x_0)$ existe (finie), alors $\forall x \in V(x_0)$*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f^{(2)}(x_0) + ... + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + o(x-x_0)^n$$

où $o(x-x_0)^n = (x-x_0)^n \epsilon(x)$ avec $\lim_{x\to x_0} \epsilon(x) = 0$.

Remarque 6.2 *La formule de Taylor Lagrange donne une étude globale de la fonction sur l'intervalle, tandis que la formule de Taylor Young donne une étude locle de la fonction au voisinage de x_0.*

La formule de Taylor Young est pratique pour le calcul des limites.

Exemple 6.2 *Soit*

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}{(\sin x)^4}.$$

En utilisant la formule de Taylor Young à l'ordre 4 pour la fonction $x \longmapsto g(x) = \ln(1+x)$, calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$.

On a

$$g(x) = g(0) + + \frac{x}{1!} g'(0) + \frac{x^2}{2!} g^{(2)}(0) + \frac{x^3}{3!} g^{(3)}(0) + \frac{x^4}{4!} g^{(4)}(0) + o(x)^4,$$

c'est à dire

$$\ln(1+x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4 \epsilon(x), \textit{ avec } \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0.$$

Par suite

$$f(x) = \frac{-\frac{x^4}{4} + x^4 \epsilon(x)}{(\sin x)^4}$$

qui admet pour limite $\frac{-1}{4}$ lorsque x tend vers 0.

6.2 D.L. au voisinage de zéro

Nous avons vu que dans un voisinage de x_0 on peut approcher $f(x)$ par un polynôme P_n de degré n de sorte que $f(x) - P_n(x) = o(x-x_0)^n$. Ceci lorsque $f^{(n)}(x)$ existe. Maintenant, nous allons voir qu'un tel polynôme peut exister même si $f^{(n)}$ n'existe pas et même si f n'est pas continue en x_0.

Définition 6.1 *Soit f une fonction définie au voisinage de zéro. On dit que f admet un D.L. d'ordre n au voisinage de 0 s'il existe un ouvert I de centre 0 et des constantes $a_0, a_1, ..., a_n$ tels que $\forall x \in I, x \neq 0$*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + x^n \epsilon(x) \textit{ avec } \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0 \\ &= \underbrace{a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n}_{P_n(x)} + o(x^n). \end{aligned}$$

1) $P_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ est la partie régulière du D.L.
2) $o(x^n) = x^n \epsilon(x)$ (avec $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$) est le reste.

Exemple 6.3 *$f(x) = 1 + \frac{5}{2}x + 3x^2 + x^3 \sin\frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^*$ est un $DL_2(0)$.*

1) Si f admet un $DL_n(0)$ alors $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe. En effet, $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + x^n \epsilon(x)$, d'où $\lim_{x\to 0} f(x) = a_0$.

Cela ne veut pas dire que f est continue en 0 car $f(0)$ peut ne pas exister.

Exemple : $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ n'admet pas D.L. au voisinage de 0 car $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$.

2) Si f admet un $DL_n(0)$ et $a_0 = f(0)$, alors f est dérivable en 0. En effet, $\forall x \neq 0$, $f(x) = f(0) + a_1 x + ... + a_n x^n + x^n \epsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = a_1 + a_2 x + ... + a_{n-1} x^{n-1} + x^{n-1} \epsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$. Donc $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = a_1 = f'(0)$.

Propriétés des D.L.

Proposition 6.1 ***(Unicité)***

Si f admet un $DL_n(0)$ alors ce D.L. est unique.

Preuve 34 *Supposons que f admet deux $DL_n(0)$, c'est à dire*

$$f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n + x^n\epsilon_1(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\epsilon_1(x) = 0$$

et

$$f(x) = b_0 + b_1x + ... + b_nx^n + x^n\epsilon_2(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\epsilon_2(x) = 0.$$

Ce qui donne

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + ... + (a_n - b_n)x^n = x^n[\epsilon_2(x) - \epsilon_1(x)\ ].$$

En passant à la limite lorsque $x \to 0$, on aura $a_0 = b_0$, d'où

$$(a_1 - b_1)x + ... + (a_n - b_n)x^n = x^n[\epsilon_2(x) - \epsilon_1(x)\ ].$$

Si $x \neq 0$, on obtient

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)x + ... + (a_n - b_n)x^{n-1} = x^{n-1}[\epsilon_2(x) - \epsilon_1(x)\ ].$$

En passant à la limite lorsque $x \to 0$, on aura $a_1 = b_1$. De cette manière, on aura $a_n = b_n$, $\forall n$. D'où l'unicité du D.L.

Théorème 6.3 *Si $f^{(n)}(0)$ existe, alors le D.L. de f est*

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0) + ... + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n\epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0.$$

Corollaire 6.1 *Si $f^{(n)}(0)$ existe, et f admet un D.L. d'ordre n au voisinage de 0, alors*

$$a_0 = f(0), a_1 = \frac{f'(0)}{1!}, a_2 = \frac{f^{(2)}(0)}{2!}, ..., \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Preuve 35 *C'est grâce à l'unicité du D.L.*

Exemple 6.4 ***(D.L. obtenu par division suivant les puissance croissante)***

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-x} \\ &= 1 + x + x^2 + ... + x^n\epsilon(x) \end{aligned}$$

avec $\epsilon(x) = \dfrac{x}{1-x} \to 0$ lorsque $x \to 0$.

On peut déduire $f^{(n)}(0)$, en effet

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0) + ... + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n\epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0.$$

et par identification, on a$\forall k : 0 \leq k \leq n$, $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} = 1$.

Remarque 6.3 *L'existence d'un D.L. n'implique pas l'existence des dérivées. En effet, soit*

$$g(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n + x^{n+1}\sin\frac{1}{x}.$$

Il est clair que g admet un $DL_n(0)$ mais elle n'est pas dérivable en 0 puisqu'elle n'est pas définie en 0.

6.3 Opérations sur les D.L.

La formule de Mac-Laurin Young nous a servi à établir certain nombre de D.L. de fonctions clasiques. Bien qu'en général, cette formule permette d'obtenir nombre de D.L., il peut s'avérer cependant que le calcul des dérivées ne soit pas aisé. Ainsi, le calcul des D.L. est souvent facilité en appliquant les régles suivantes.

6.3.1 D.L. obtenu par restriction

Si f admet un D.L. d'ordre n au voisinage de 0, alors $\forall k \leq n$, f admet un D.L. d'ordre k. En effet, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + ... + a_nx^n + x^n\epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0 \\ &= a_0 + a_1x + ... + a_kx^k + a_{k+1}x^{k+1} + a_{k+2}x^{k+2} + ... \\ &\quad + a_nx^n + x^n\epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0 \\ &= a_0 + a_1x + ... + a_kx^k \\ &\quad + x^k\left[a_{k+1}x + a_{k+2}x^2 + ... + a_nx^{n-k} + x^{n-k}\epsilon(x)\right] \end{aligned}$$

avec $\epsilon_2(x) = \left[a_{k+1}x + a_{k+2}x^2 + ... + a_nx^{n-k} + x^{n-k}\epsilon(x)\right] \to 0$ lorsque $x \to 0$.

6.3.2 Opérations algébriques sur les D.L.

Théorème 6.4 *Si f et g admettent des D.L. d'ordre n au voisinage de 0, alors $f+g, fg$ admettent des D.L. d'ordre n et $\frac{f}{g}$ admet un D.L. d'ordre n si $\lim_{x\to 0} g(x) \neq 0$.*

Exemple 6.5 *1) Soit $h(x) = \ln(1+x) + \cos x$. On a*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4\epsilon_1(x),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\epsilon_2(x)$$

et donc

$$\begin{aligned} h(x) &= x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x^4}{4} + x^4\epsilon_1(x) \\ &\quad +1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} + x^4\epsilon_2(x) \\ &= 1 + x - x^2 + \tfrac{x^3}{3} - \tfrac{5}{25}x^4 + x^4\epsilon(x) \end{aligned}$$

est un D.L. d'ordre 4 de h au voisinage de 0.

2) Soient $f(x) = \sin x . \cos x$, $g(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. On a

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_1(x),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^3\epsilon_2(x)$$

et donc

$$f(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + x^3\epsilon(x),$$

$$g(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + x^3\epsilon(x).$$

6.3.3 D.L. d'une fonction composée

Théorème 6.5 *Si f et g admettent des D.L. d'ordre n au voisinage de 0 et si $g(0) = 0$, alors $f \circ g$ admet un D.L. d'ordre n au voisinage de 0.*

Remarque 6.4 *La partie régulière de $f \circ g$ s'obtient en remplaçant dans la partie régulière de f, la partie régulière de g et en gardant que les puissances inférieures ou égales à n.*

Exemple 6.6 *Soit $h(x) = e^{\sin x}$. Posons $f(u) = e^u$ et $g(x) = \sin x$. On a $g(0) = \sin 0 = 0$,*

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3!} + o\left(u^3\right),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$$

et donc

$$\begin{aligned} (f\circ g)(x) &= e^{\sin x} \\ &= 1 + \left(x - \tfrac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right) + \tfrac{1}{2}\left(x - \tfrac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)^2 \\ &\quad + \tfrac{1}{6}\left(x - \tfrac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)^3 \\ &= 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

6.4 Dérivation de D.L.

Nous avons vu que l'existence de D.L. ne nécessite pas l'existence de la dérivée. Donc nous ne pourons rien dire en ce qui concerne le D.L. de la dérivée.

Théorème 6.6 *Soit f une fonction dérivable au voisinage de 0 et admettant un D.L. d'ordre n au voisinage de 0*

$$f(x) = P(x) + x^n\epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0.$$

Si la dérivée f' admet un D.L. d'ordre $(n-1)$ au voisinage de 0, alors

$$f'(x) = Q(x) + x^{n-1}\eta(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\eta(x) = 0$$

avec

$$Q(x) = P'(x).$$

Exemple 6.7 *Soit* $f(x) = \frac{1}{1-x}$. *On sait que*

$$f(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n + x^n \epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^2} &= \left(\frac{1}{1-x}\right)' = f'(x) \\ &= 1 + 2x + ... + nx^{n-1} + x^{n-1}\eta(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \eta(x) = 0. \end{aligned}$$

6.5 Intégration de D.L.

Théorème 6.7 *Soit f une fonction numérique dérivable dans l'intervalle $I =]-\alpha, \alpha[, \alpha > 0$, de dérivée f'. Si f' admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0*

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + x^n \epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0,$$

alors f admet un développement limité d'ordre $(n+1)$ au voisinage de 0

$$f(x) = f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + ... + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + x^{n+1} \eta(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \eta(x) = 0,$$

ici $x^{n+1}\eta(x) = \int_0^x t^n \epsilon(t)\, dt$.

Exemple 6.8 *On a*

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n + x^n \epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$$

et par suite

$$\ln(1+x) = \ln 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} + x^{n+1} \eta(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \eta(x) = 0.$$

6.6 D.L. au voisinage de x_0 et de l'infini

Définition 6.2 *On dit que f définie au voisinage de x_0 admet un D.L. d'ordre n au $V(x_0)$ si la fonction*

$$F : x \longmapsto F(x) = f(x_0 + x)$$

admet un D.L. d'ordre n au $V(0)$.

On a

$$F(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + x^n \epsilon(x)$$

et donc

$$f(x_0 + x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + x^n \epsilon(x),$$

c'est à dire

$$f(y) = a_0 + a_1(y - x_0) + ... + a_n (y - x_0)^n + (y - x_0)^n \epsilon((y - x_0))$$

ou d'une manière équivalente

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n (x - x_0)^n + (x - x_0)^n \epsilon((x - x_0)).$$

Finalement, on se ramène du voisinage de x_0 au voisinage de 0 par le changement de variable $z = x - x_0$.

De même le D.L. au voisinage de l'infini se fait par le changement de variable $y = \frac{1}{x}$.

Définition 6.3 *On dit qu'une fonction numérique admet un D.L. d'ordre n au $V(+\infty)$ s'il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que l'on ait au $V(+\infty)$*

$$f(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

Exemple 6.9 *Le D.L. de $x \longmapsto e^x$ au $V(1)$. On pose $u = x-1$, donc au $V(0)$ on a*

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3!} + ... + \frac{u^n}{n!} + o(u^n).$$

Par suite

$$e^{x-1} = 1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3!} + ... + \frac{(x-1)^n}{n!} + o((x-1)^n).$$

Finalement

$$e^x = e\left[1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3!} + ... + \frac{(x-1)^n}{n!} + o((x-1)^n)\right].$$

2) Le D.L. de $x \longmapsto e^x$ au $V(+\infty)$. Au voisinage de l'infini, il suffit de poser $y = \frac{1}{x}$. On a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

et donc

$$e^{\frac{1}{y}} = 1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{3!y^3} + ... + \frac{1}{n!y^n} + o\left(\frac{1}{y^n}\right).$$

6.7 D.L. généralisé

Si f définie au $V(0)$ n'admet pas D.L. au $V(0)$ mais $x^\alpha f(x)$, $(\alpha > 0)$ admet un D.L., on peut alors écrire au $V(0)$ pour $x \neq 0$

$$x^\alpha f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + x^n \epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0,$$

d'où

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}\left[a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + x^n \epsilon(x)\right]$$

c'est un D.L. généralisé de f au $V(0)$.

Exemple 6.10 *Soit f définie par*

$$f(x) = \frac{1}{x - x^2}.$$

f n'admet pas un D.L. au voisinage de 0 car $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, mais on a

$$\begin{aligned} xf(x) &= \frac{1}{1-x} \\ &= 1 + x + x^2 + ... + x^n \epsilon(x). \end{aligned}$$

Par suite

$$f(x) = \frac{1}{x} + 1 + x + ... + x^{n-1} + o\left(x^{n-1}\right)$$

est le D.L. généralisé de f.

6.8 Applications des D.L.

Les D.L. sont trés utiles dans la recherche des limites de fonctions et l'étude des formes indéterminées.

Exemple 6.11 *1) Trouver la limite lorsque x tend vers 0 de la fonction*

$$f(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{x(1-\cos x)}.$$

On a

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o\left(x^2\right)$$

et par suite

$$f(x) = \frac{\frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)}{\frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)}.$$

Finalement

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{2}{3}.$$

2) Déterminer la limite, lorsque x tend vers $+\infty$ de la fonction

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} - \sqrt[3]{x^3+x^2+1}.$$

On a une forme indéterminée $+\infty - \infty$. On a vu qu'en posant $y = \frac{1}{x}$, on se ramène au voisinage de 0, on trouve

$$\begin{aligned} g(y) &= f\left(\frac{1}{y}\right) \\ &= \frac{1}{y-y^2} - \frac{1}{y}\left[1+y+y^3\right]^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Après calculs on trouve

$$g(y) = \frac{2}{3} + \frac{10}{9} + o(y).$$

Finalement,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{y\to 0} g(y) = \frac{2}{3}.$$

Exercice 1 :
Calculer les limites suivantes :

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2},$$

$$b)\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x},$$

$$c)\ \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}.$$

Solution :
a) On a

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + o\left(x^4\right),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right).$$

Donc

$$e^{x^2} - \cos x = \frac{3}{2}x^2 + o\left(x^2\right)$$

et par suite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \frac{3}{2}.$$

b) On a

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right).$$

Donc

$$\ln(1+x) - \sin x = -\frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$$

et par suite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x} = 0.$$

c) On a

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right),$$

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o\left(x^4\right).$$

Donc

$$\cos x - \sqrt{1-x^2} = \frac{x^4}{6} + o\left(x^4\right)$$

et par suite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{x^4}=\frac{1}{6}.$$

Exercice 2 : Calculer la limite suivante

$$\lim_{x\to -\infty}\sqrt{x^2+3x+2}+x.$$

Solution :

On a

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+3x+2}+x &= |x|\left(\sqrt{1+\tfrac{3}{x}+\tfrac{2}{x^2}}-1\right)\\ &= |x|\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)+o\left(\tfrac{1}{x}\right)-1\right)\\ &= |x|\left(\frac{1}{2}\frac{3}{x}+o\left(\tfrac{1}{x}\right)\right)\end{aligned}$$

et par suite

$$\lim_{x\to -\infty}\sqrt{x^2+3x+2}+x=\frac{-3}{2}.$$

Chapitre 7

Espaces vectoriels et applications linéaires

Dans ce chapitre, $(K, +, .)$ désigne un corps commutatif, en pratique $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$. On note par 1_K l'élément neutre pour la loi "."

7.1 Strucrure d'espace vectoriel

On appelle $K-$espace vectoriel (ou espace vectoriel sur le corps K) tout ensemble E muni d'une loi de composition interne notée $\oplus$ et d'une loi de composition externe notée $\otimes$

$$\oplus : \begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (x, y) & \longmapsto & x \oplus y \end{array} \qquad \otimes : \begin{array}{ccc} K \times E & \to & E \\ (\lambda, y) & \longmapsto & \lambda \otimes y \end{array}$$

tels que :
1. $(E, \oplus)$ est un groupe abélien.
2. $\forall (\lambda, \mu) \in K^2, \forall x \in E$:
a) $(\lambda + \mu) \otimes x = (\lambda \otimes x) \oplus (\mu \otimes x)$
b) $\lambda \otimes (\mu \otimes x) = (\lambda.\mu) \otimes x$
3. $\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in K : \lambda \otimes (x \oplus y) = (\lambda \otimes x) \oplus (\lambda \otimes y)$
4. $\forall x \in E, 1_K \otimes x = x$ avec 1_K l'élément neutre de K pour la deuxième loi (la multiplication).
Lorsqu'on ne change pas le corps de base K on peut utiliser l'expression espace vectoriel au lieu de $K-$espace vectoriel.

Conventions
- Les éléments de E sont appelés **vecteurs.**
- les éléments de K sont appelés **scalaires.**
- $\oplus$ est notée $+$.
- $\otimes$ est notée .

Exemples et conséquences
a) $E = \mathbb{R}^2, K = \mathbb{R}$

$$\oplus : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ ((x, y), (x', y')) & \longmapsto & (x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y') \end{array}$$

$$\otimes : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (\lambda, (x', y')) & \longmapsto & \lambda \otimes (x, y) = (\lambda.x, \lambda.y) \end{array}$$

$(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.
b) Le corps K est un $K-$espace vectoriel pour les lois $+$ et ., dans ce cas les éléments de K sont considérés simultanément comme vecteurs et scalaires.
c) $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et en général si $K \subset L$ alors L est un $K-$espace vectoriel.

Conséquences

Théorème 7.1 *Soient $(E, \oplus, \otimes)$ un $K-$espace vectoriel, $\lambda, \mu \in K$ et $x, y \in E$, alors on a*
1. $\lambda \otimes x = 0_E \Longleftrightarrow \lambda = 0_K$ ou $x = 0_E$
2. $(\lambda - \mu) \otimes x = (\lambda \otimes x) - (\mu \otimes x)$
3. $\lambda \otimes (x - y) = (\lambda \otimes x) - (\lambda \otimes y)$

Preuve 36 $\Longrightarrow)$ $\lambda \otimes x = 0_E \Longrightarrow \lambda = 0_K$ *ou* $x = 0_E$ *?*
Supposons que $\lambda \otimes x = 0_E$ et $\lambda \neq 0_K$ et montrons que $x = 0_E$.
Si $\lambda \neq 0_K$, alors λ^{-1} existe dans K (car K est un corps). On a

$$\lambda^{-1} \otimes (\lambda \otimes x) = \lambda^{-1} \otimes 0_E = 0_E$$

et

$$\lambda^{-1} \otimes (\lambda \otimes x) = \left(\lambda^{-1}.\lambda\right) \otimes x = 1_K \otimes x = x.$$

Donc $x = 0_E$.

$\Longleftarrow)$ $\lambda = 0_K$ *ou* $x = 0_E \Longrightarrow \lambda \otimes x = 0_E$?

Supposons $\lambda = 0_K$. *On a*

$$\begin{aligned} 0_K \otimes x &= (0_K + 0_K) \otimes x \\ &= (0_K \otimes x) \oplus (0_K \otimes x). \end{aligned}$$

En composant par $-(0_K \otimes x)$, *on trouve* $0_K \otimes x = 0_E$.

Supposons maintenant que $x = 0_E$. *On a*

$$\begin{aligned} \lambda \otimes 0_E &= \lambda \otimes (0_E + 0_E) \\ &= (\lambda \otimes 0_E) \oplus (\lambda \otimes 0_E). \end{aligned}$$

En composant par $-(\lambda \otimes 0_E)$, *on trouve* $\lambda \otimes 0_E = 0_E$.

2. On a

$$\begin{aligned} \lambda \otimes x &= (\lambda - \mu + \mu) \otimes x \\ & [(\lambda - \mu) \otimes x] \oplus (\mu \otimes x). \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$(\lambda - \mu) \otimes x = (\lambda \otimes x) - (\mu \otimes x).$$

3. On a

$$\begin{aligned} \lambda \otimes x &= \lambda \otimes (x - y \oplus y) \\ & [\lambda \otimes (x - y)] \oplus (\lambda \otimes y). \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\lambda \otimes (x - y) = (\lambda \otimes x) - (\lambda \otimes y).$$

Proposition 7.1 *(Utilisation du symbole $\sum$ dans les espaces vectoriels)*

Soient E un $K-$espace vectoriel, $n, p \in \mathbb{N}^*$, $x_i, y_i \in E$, $\lambda_i \in K$. On a

1) $\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=n+1}^{p} x_i = \sum_{i=1}^{p} x_i$.

2) $\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$

3) $\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i$

4) $\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) x$.

7.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 7.1 *Soient E un $K-$espace vectoriel et F un sous ensemble de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel (s.e.v.) de E si et seulement si*

$$\begin{cases} 1) \ F \neq \emptyset \\ 2) \ \forall (x, y) \in F^2, (x \oplus y) \in F \\ 3) \ \forall \lambda \in K, \forall x \in F, (\lambda \otimes x) \in F. \end{cases}$$

Exemple 7.1 *1. $\{0_E\}$ et E sont des s.e.v. de E.*

2. $\mathbb{R} \times \{0_{\mathbb{R}}\}$ est un s.e.v. de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ sur le corps $\mathbb{R}$.

3. Si F est un s.e.v. de E et E est un s.e.v. de G alors F est un s.e.v. de G.

Proposition 7.2 *Soient E un $K-$espace vectoriel et $F \subset E$. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors il est lui même un $K-$espace vectoriel pour les lois induites par celles de E définies par*

$$\begin{array}{rccc} \oplus: & F \times F & \rightarrow & F \\ & (x, y) & \longmapsto & x \oplus y \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \otimes: & K \times F & \rightarrow & F \\ & (\lambda, y) & \longmapsto & \lambda \otimes y \end{array}$$

Proposition 7.3 *Soient E un $K-$espace vectoriel et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de s.e.v. de E, alors $\cap_{i \in I} F_i$ est un s.e.v. de E.*

Preuve 37 *Notons* $F = \cap_{i \in I} F_i$.

1. $F \neq \emptyset$ *car* $0_E \in F_i$ *pour tout* i *de* I.

2. Soit $(x, y) \in F^2$

$$\begin{aligned} x, y \in F &\Longrightarrow \forall i \in I, \, x \in F_i \text{ et } y \in F_i \\ &\Longrightarrow \forall i \in I, \, x \oplus y \in F_i \\ &\Longrightarrow x \oplus y \in F \end{aligned}$$

3. Soit $(\lambda, x) \in K \times F$

$$\begin{aligned} \lambda \in K, x \in F &\Longrightarrow \forall i \in I, \, x \in F_i \\ &\Longrightarrow \forall i \in I, \, (\lambda \otimes x) \in F_i \\ &\Longrightarrow (\lambda \otimes x) \in F. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $F = \cap_{i \in I} F_i$ *est un sous espace vectoriel de* E.

Proposition 7.4 *Soient E un $K-$espace vectoriel, F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. L'ensemble défini par*

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 &= \{x \in E : \exists (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2, x = x_1 + x_2\} \\ &= \{x_1 + x_2 : x_1 \in F_1, x_2 \in F_2\} \end{aligned}$$

*est un sous-espace vectoriel de E appelé **somme** de F_1 et F_2.*

Preuve 38 *1. $F_1 + F_2 \neq \emptyset$ car $0_E = 0_E + 0_E \in F_1 + F_2$.*
2. Soient $x, y \in F_1 + F_2$

$$x \in F_1 + F_2 \Longrightarrow \exists (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2 : x = x_1 + x_2$$

et

$$y \in F_1 + F_2 \Longrightarrow \exists (y_1, y_2) \in F_1 \times F_2 : y = y_1 + y_2.$$

Montrons que $x + y \in F_1 + F_2$. On a

$$\begin{aligned} x + y &= x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \\ &= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \in F_1 + F_2. \end{aligned}$$

3. Soient $\lambda \in K, x \in F_1 + F_2$. On a

$$x \in F_1 + F_2 \Longrightarrow \exists (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2 : x = x_1 + x_2.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \lambda \otimes x &= \lambda \otimes (x_1 + x_2) \\ &= (\lambda \otimes x_1) + (\lambda \otimes x_2) \in F_1 + F_2. \end{aligned}$$

Proposition 7.5 *Soient E un $K-$espace vectoriel, F_1, F_2 et F_3 trois sous-espaces vectoriels de E. Alors, on a*

1. $F_1 + F_2 = F_2 + F_1$	1. $F_1 \cap F_2 = F_2 \cap F_1$
2. $F_1 \subset F_1 + F_2$	2. $F_1 \cap F_2 \subset F_1$ *(resp. F_2)*
3. $F_1 + E = E$	3. $F_1 \cap E = F_1$
4. $F_1 + F_1 = F_1$	4. $F_1 \cap F_1 = F_1$
$\left.\begin{array}{c} F_1 \subset F_3 \\ \text{et} \\ F_2 \subset F_3 \end{array}\right\} \Longrightarrow F_1 + F_2 \subset F_3$	$\left.\begin{array}{c} F_3 \subset F_1 \\ \text{et} \\ F_3 \subset F_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow F_3 \subset F_1 \cap F_2.$

Définition 7.2 ***(somme directe)***
Soient E un $K-$espace vectoriel et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme $F_1 + F_2$ est directe si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ et on note $F_1 \oplus F_2$.

Proposition 7.6 ***(caractérisation de la somme directe)***
Pour que deux sous-espaces vectoriels soient en somme directe, il faut et il suffit que tout élément de la somme $F_1 + F_2$ se décompose de façon unique en somme d'un élément de F_1 et d'un autre de F_2. C'est à dire,

$$F_1 + F_2 = F_1 \oplus F_2 \iff \begin{array}{l} \forall x \in F_1 + F_2, \exists! x_1 \in F_1 \text{ et } \exists! x_2 \in F_2 \\ x = x_1 + x_2. \end{array}$$

Preuve 39 *Supposons que $F_1 + F_2$ est directe, c'est à dire $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ et soit $x \in F_1 + F_2$*

$$x \in F_1 + F_2 \Longrightarrow \exists (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2 : x = x_1 + x_2.$$

Supposons que l'écriture n'est pas unique, c'est à dire

$$\exists (y_1, y_2) \in F_1 \times F_2 : x = y_1 + y_2.$$

Donc

$$\begin{array}{l} x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \\ \iff x_1 - y_1 = y_2 - x_2 \\ \iff x_1 - y_1 \in F_1 \cap F_2 \text{ et } y_2 - x_2 \in F_1 \cap F_2 \\ \Longrightarrow x_1 - y_1 = 0_E \text{ et } y_2 - x_2 \in 0_E \text{ car } F_1 \cap F_2 = \{0_E\} \\ \Longrightarrow x_1 = y_1 \text{ et } y_2 - x_2. \end{array}$$

Ce qui montre que l'écriture est unique.
Réciproquement, supposons que tout élément de $F_1 + F_2$ se décompose de façon unique et $x \in F_1 \cap F_2$. On a $0_E \in F_1 \cap F_2$ et

$$\begin{array}{l} 0_E = 0_E + 0_E \\ 0_E = x + (-x), \end{array}$$

donc $x = 0_E$. Ainsi, $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$. Finalement, F_1 et F_2 sont en somme directe.

Définition 7.3 *Soient E un $K-$espace vectoriel et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. F_1, F_2 sont dits supplémentaires dans E si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ et $F_1 + F_2 = E$.*

Exemple 7.2 *$K = \mathbb{R}, E = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, $F_1 = \mathbb{R} \times \{0\}$, $F_2 = \{0\} \times \mathbb{R}$. F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E, supplémentaires dans E.*

7.3 Dépendance et indépendance linéaires

7.3.1 Familles liées, familles libres

1) Combinaisons linéaires

Définition 7.4 *Soient E un $K-$e.v. $(v_1, v_2, ..., v_n) \in E^n$. On appelle combinaison linéaires des vecteurs $v_1, v_2, ..., v_n$ tout vecteur v de E de la forme*

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

où $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in K$.

Proposition 7.7 ***(autre caractérisation d'un s.e.v. par les combinaisons linéaires)***
Soient E un $K-$espace vectoriel et F un sous ensemble de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel (s.e.v.) de E si et seulement si

$$\begin{cases} 1)\ F \neq \emptyset \\ 2)\ \forall (x,y) \in F^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in K^2, (\lambda x + \mu y) \in F. \\ \text{(i.e. } F \text{ est stable par combinaisons linéaires).} \end{cases}$$

2) Familles libres, familles liées

Définition 7.5 *Soient E un $K-$e.v., $n \in \mathbb{N}^*$, $(v_1, v_2, ..., v_n) \in E^n$.*
1) On dit que la famille $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ est libre si et seulement si $\forall \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in K$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ..., \lambda_n = 0_K.$$

On dit aussi que les vecteurs $v_1, v_2, ..., v_n$ sont linéairement indépendants.
2) On dit que la famille $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ est lièe si et seulement si $\exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in K - \{0_K\} : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_E$.

Exemple 7.3 *1) $E = \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (2,1,-1)$, alors v_1 et v_2 sont L. I. En effet, Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$, montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.*

$$\begin{aligned} \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_{\mathbb{R}^3} &\Longrightarrow \lambda_1 (1,0,1) + \lambda_2 (2,1,-1) = (0,0,0) \\ &\Longrightarrow (\lambda_1, 0, \lambda_1) + (2\lambda_2, \lambda_2, -\lambda_2) = (0,0,0) \\ &\Longrightarrow (\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2) = (0,0,0) \\ &\Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \\ &\Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

2) $E = \mathbb{R}^2$, $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (2,1)$, $v_3 = (-1,0)$. La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est lièe. En effet,

$$v_1 - v_2 - v_3 = (0,0) = 0_{\mathbb{R}^2}.$$

Remarque 7.1 *1) Pour que la famille $\{v\}$ soit liée il faut et il suffit que $v = 0_E$.*
2) $\forall v \in E, \{v, v\}$ est liée $v - v = 0_E$.
3) Toute famille contenant 0_E est liée.
4) Si la famille $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ est lièe alors tout v_i s'écrit comme combinaison linéaires des autres.

7.3.2 Sous-espace engendré par une partie

Définition 7.6 *Soient E un $K-$e.v. et $A \subset E$. On appelle s.e.v. engendré par A l'intersection de tous les s.e.v. de E contenant A et on le note $\langle A \rangle$ oubien*

$$Vect\,(A) = \cap_{\substack{F s.e.v \\ A \subset F}} F.$$

En d'autres termes, si $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$,

$$\langle A \rangle = \left\{ v \in E : \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in K, v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \right\}.$$

7.3.3 Familles génératrices, bases

Définition 7.7 *Soient E un $K-$e.v. et $G \subset E$. On dit que G est une famille génératrice de E si et seulement si $G = E$. C'est à dire si $G = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, on dit que G engendre E (ou G est une partie génératrice de E) si et seulement si*

$$\forall v \in E, \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n : v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i.$$

Définition 7.8 *Soient E un $K-$e.v. et $B \subset E$. On dit que B est une base de E si B est libre et génératrice de E. C'est à dire, si on pose $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, alors B est une base de E si*

$$\forall x \in E, \exists! \left(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\right) \in K^n : x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

Dans ce cas, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sont appelés les coordonnées (oubien les composantes) de x dans la base B.

Exemple 7.4 *1) $E = \mathbb{R}^2, B = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ est une base de E. On l'appelle base canonique de $\mathbb{R}^2$.*
a) B est libre, en effet : soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha e_1 + \beta e_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$

$$\begin{aligned} \alpha e_1 + \beta e_2 = 0_{\mathbb{R}^2} &\Longrightarrow \alpha (1,0) + \beta (0,1) = (0,0) \\ &\Longrightarrow (\alpha, \beta) = (0,0) \\ &\Longrightarrow \alpha = \beta = 0. \end{aligned}$$

b) B engendre $\mathbb{R}^2$, en effet, soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, donc $\exists \lambda_1 = x \in \mathbb{R}, \exists \lambda_2 = y \in \mathbb{R}$:

$$(x,y) = \lambda_1 (1,0) + \lambda_2 (0,1).$$

2) $E = \mathbb{R}^3, B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $v = (5,-1,3) \in \mathbb{R}^3$. Les composantes de v dans la base B sont $5, -1, 3$ car

$$v = (5,-1,3) = 5(1,0,0) - 1(0,1,0) + 3(0,0,1).$$

$B' = \{w_1 = (1,1,0), w_2 = (1,0,2), w_3 = (1,2,3)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (vérifier le). Les composantes de v dans la base B' sont $\frac{13}{5}, \frac{21}{5}, \frac{-9}{5}$ car

$$v = (5,-1,3) = \frac{13}{5}(1,1,0) + \frac{21}{5}(1,0,2) - \frac{9}{5}(1,2,3).$$

Proposition 7.8 *Soient F_1, F_2 deux familles de vecteurs de E telles que $F_1 \subset F_2$, alors on a*
a) F_2 es libre $\Longrightarrow$ F_1 es libre.
b) F_1 engendre $E \Longrightarrow F_2$ engendre E.

Proposition 7.9 *Soient $n \in \mathbb{N}^*, F_1 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}, F_2 = F_1 \cup \{v_{n+1}\} = \{v_1, v_2, ..., v_n, v_{n+1}\}$ deux s.e.v. de E, alors on a*
a) F_1 es libre et $v_{n+1} \notin \langle F_1 \rangle \Longrightarrow F_2$ es libre.
b) F_2 engendre E et $v_{n+1} \in \langle F_1 \rangle \Longrightarrow F_1$ engendre E.

7.4 Théorie de la dimension

Définition 7.9 *Soit E un $K-$e.v. On appelle dimension de E le cardinal d'une base B de E et on note $\dim E =$ card$B$.*

Exemple 7.5 *a) $E = \mathbb{R}^n, B_{\mathbb{R}^n} = \{e_1 = (1,0,...,0), e_2 = (0,1,...,0), ..., e_n = (0,0,...,1)\}$, $\dim \mathbb{R}^n = n$.*
b) La famille $L = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}, u_i \in \mathbb{R}^3$ ne peut pas être une base de $\mathbb{R}^3$ car $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ et card$L = 4$.

Théorème de la base incomplète
Soit E un $K-$e.v. de dimension finie $\dim E = n$, $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E. Soit

$$L = \{u_1, u_2, ..., u_r\}$$

$r \leq n$ une famille libre de E. Alors il existe au moins une façon de compléter L par $(n-r)$ vecteurs de B pour obtenir une nouvelle base de E.

Exemple 7.6 $E = \mathbb{R}^3$, $B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ *la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit*

$$L = \{u_1 = (1,0,1), u_2 = (0,1,1)\}$$

une famille libre de $\mathbb{R}^3$. On peut prendre $e_3 = (0,0,1)$ de B pour compléter L et avoir une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$. $L' = \{u_1, u_2, e_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 7.10 *Soit E un $K-$e.v. de dimension finie* $\dim E = n$. *Alors*

1. *Toute famille libre admet au plus n éléments.*
2. *Toute famille génératrice admet au moins n éléments.*
3. *Toute base de E admet exactement n éléments.*

Proposition 7.11 *Soit E un $K-$e.v. de dimension finie* $\dim E = n$. *F une famille finie d'éléments de E. Alors deux quelconques de ces propriétés entrainent la troisième.*

1. *card$F = n$*
2. *F est libre*
3. *F est génératrice.*

Exemple 7.7 *Soit $A = \{(1,1,0), (1,0,2), (1,2,3)\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?*
On a card$A = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, donc il suffit de montrer que A est libre oubien A est génératrice.

Proposition 7.12 *Soit E un $K-$e.v. de dimension finie, alors tout s.e.v. F de E est de dimension finie et on a* $\dim F \leq \dim E$.

Proposition 7.13 *Soit F un s.e.v. de E avec dim$E = n, \dim F = p$. Alors*

1. *F admet un supplémentaire dans E*
2. *Tout supplémentaire de F dans E est de dimension $n - p$.*

Corollaire 7.1 *Soient E un $K-$e.v. de dimension finie, F et G sont deux s.e.v. de E. Alors*

$$\left.\begin{array}{r} F \subset G \\ \dim F = \dim G \end{array}\right\} \Longrightarrow F = G.$$

Preuve 40 $F \subset G \Longrightarrow F$ *admet un supplémentaire H dans G.*
$\dim H = \dim G - \dim F = 0 \Longrightarrow H = \{0_E\}$. *Donc*

$$G = F + H = F + \{0_E\} = F.$$

Théorème 7.2 ***(Formule de Grassmann)***
Soient E un $K-$e.v. de dimension finie. Pour tout F, G s.e.v. de E.

$$\dim (F + G) = \dim F + \dim G - \dim (F \cap G)$$

Corollaire 7.2 *Si F et G sont deux s.e.v. de E en somme directe. Alors*

$$\dim (F \oplus G) = \dim F + \dim G.$$

Rang d'une famille finie de vecteurs

Définition 7.10 *Soit E un $K-$e.v. et F une famille d'éléments de E. On appelle rang de F et on note rg$F$ le nombre maximal de vecteurs de F qui sont L.I.*

Exemple 7.8 $K = \mathbb{R}, E = \mathbb{R}^3$, $F = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ *avec* $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (1, 1, -1)$, $v_3 = (0, 1, 1)$, $v_4 = (1, 0, 2)$.

$$\left.\begin{array}{r} v_4 = v_1 + v_3 \\ v_2 = -v_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Toute famille de 3 vecteurs est liée.}$$

$\{v_1, v_3\}$ *est libre* $\Longrightarrow$ *rg$F$=2.*

7.5 Généralités sur les applications linéaires

Définition 7.11 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur K et $f : E \to F$ une application. On dit que f est une application linéaire si et seulement si*

$$\begin{array}{l} 1.\ \forall (x, y) \in E^2, f(x + y) = f(x) + f(y) \\ 2.\ \forall \lambda \in K, \forall x \in E, f(\lambda x) = \lambda f(x). \end{array}$$

Ceci est équivalent à dire

$$\forall \lambda, \mu \in K,\ \forall (x, y) \in E^2, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

On note par $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F.

Appellations

Si $E = F$, l'application linéaire $f : E \to F$ est dite **endomorphisme**.
Si f est bijective et linéaire de $E \to F$, elle est dite **isomorphisme**.
Si f est un endomorphisme bijectif alors c'est un **automorphisme**.

Remarque 7.2 *Si f est une application linéaire alors $f(0_E) = 0_F$.*

Exemple 7.9 *1.*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z) = (x+y, y+z, z) \end{array}$$

f est linéaire (à vérifier).

2.

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & g(x,y) = (x+y, 1, x-y) \end{array}$$

g n'est pas linéaire car $g(0,0) = (0,1,0) \neq (0,1,0)$.

3.

$$\begin{array}{rccl} h: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & h(x,y) = |x-y| \end{array}$$

h n'est pas linéaire car $h(X+Y) \neq h(X) + h(Y)$.

Proposition 7.14 *(Une autre caractérisation des applications linéaires)*

Soient E et F deux espaces vectoriels sur K et $f \in L(E,F)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x_1, x_2, ..., x_N) \in E^n$, $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in K^n$, on a

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Preuve 41 *Par récurrence.*

Remarque 7.3 *Une application linéaire $f \in L(E,F)$ est entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base de E.*

Exemple 7.10 *Déterminer l'application linéaire f telle que $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, f(e_1) = (1,1), f(e_2) = (1,0), f(e_3) = (1,2)$ où $\{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*

Soit X un élément de $\mathbb{R}^3$, alors $X = (x,y,z)$ et donc

$$\begin{array}{rcl} f(X) = f(x,y,z) & = & f[(x,0,0) + (0,y,0) + (0,0,z)] \\ & = & f[x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)] \\ & = & xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \\ & = & x(1,1) + y(1,0) + z(1,2) \\ & = & (x+y+z, x+2y). \end{array}$$

7.6 Noyau, images

Définition 7.12 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur K et $f: E \to F$ une application linéaire.*

1. On appelle image de f et on $\operatorname{Im} f$ l'ensemble défini par

$$\operatorname{Im} f = \{y \in F / \exists x \in E, y = f(x)\} = \{f(x), x \in E\}.$$

2. On appelle noyau de f et on $\ker f$ l'ensemble défini par

$$\ker f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E, f(x) = 0_F\}.$$

Quelques propriétés de $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$

Proposition 7.15 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur K et $f: E \to F$ une application linéaire.*

1. Pour tout s. e. v. E_1 de E l'image directe $f(E_1)$ est un s. e. v. de F ; en particulier $\operatorname{Im} f$ est un s. e. v. de F.

2. Pour tout s. e. v. F_1 de F l'image réciproque $f^{-1}(F_1)$ est un s. e. v. de E ; en particulier $\ker f$ est un s. e. v. de E.

Preuve 42 *1. a) On a $0_E \in E_1$ et $f(0_E) = 0_F$ donc $0_F \in f(E_1)$. Par suite $f(E_1) \neq \emptyset$.*

b) Soient $y_1, y_2 \in f(E_1)$, donc $\exists x_1, x_2 \in E_1, y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.

$$\begin{array}{rcl} y_1 + y_2 & = & f(x_1) + f(x_2) \\ & = & f(x_1 + x_2) \in f(E_1). \end{array}$$

c) Soient $y \in f(E_1), \lambda \in K$, donc $\exists x \in E_1, y = f(x)$.

$$\begin{array}{rcl} \lambda y & = & \lambda f(x) \\ & = & f(\lambda x) \in f(E_1). \end{array}$$

Ce qui montre que que $f(E_1)$ *est un s. e. v. de* F.

2. a) On a $f^{-1}(F_1) \neq \emptyset$ *car* $f(0_E) = 0_F \in F_1$. *Donc* $0_E \in f^{-1}(F_1)$.

b) Soient $x_1, x_2 \in f^{-1}(F_1)$

$$\begin{aligned} x_1, x_2 \in f^{-1}(F_1) &\Longrightarrow f(x_1) \in F_1 \text{ et } f(x_2) \in F_1 \\ &\Longrightarrow f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) \in F_1 \\ &\Longrightarrow x_1 + x_2 \in f^{-1}(F_1) \end{aligned}$$

c) Soient $x \in f^{-1}(F_1)$ *et* $\lambda \in K$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(F_1) \text{ et } \lambda \in K &\Longrightarrow f(x) \in F_1 \text{ et } \lambda \in K \\ &\Longrightarrow \lambda f(x) = f(\lambda x) \in F_1 \\ &\Longrightarrow \lambda x \in f^{-1}(F_1). \end{aligned}$$

Ce qui montre que que $f^{-1}(F_1)$ *est un s. e. v. de* E.

Proposition 7.16 *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels sur* K *et* $f : E \to F$ *une application linéaire.*

1. f *est injective* $\Longleftrightarrow \ker f = \{0_E\}$

2. f *est surjective* $\Longleftrightarrow \operatorname{Im} f = F$.

Preuve 43 *1. On suppose que* f *est injective et soit* $x \in \ker f$

$$\begin{aligned} x \in \ker f &\Longrightarrow f(x) = 0_F = f(0_E) \\ &\Longrightarrow x = 0_E \\ &\Longrightarrow \ker f = \{0_E\}. \end{aligned}$$

Réciproquement, on suppose $\ker f = \{0_E\}$. *Soient* $x_1, x_2 \in E$ *tels que* $f(x_1) = f(x_2)$

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Longrightarrow f(x_1) - f(x_2) = 0_F \\ &\Longrightarrow f(x_1 - x_2) = 0_F \\ &\Longrightarrow x_1 - x_2 \in \ker f \\ &\Longrightarrow x_1 - x_2 = 0_E \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2 \\ &\Longrightarrow f \text{ est injective.} \end{aligned}$$

2. Nous avons f *est surjective* $\Longleftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x) \in f(E)$, *c'est à dire* $F \subset f(E)$. *On sait que* $f(E) \subset F$, *d'où* $f(E) = F$. $\operatorname{Im} f = F$.

Exemple 7.11

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z) = (x+y, y+z, z) \end{array}$$

est une application linéaire. Déterminer $\operatorname{Im} f$ *et* $\ker f$.

$$\begin{aligned} \ker f &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (0,0,0)\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x+y, y+z, z) = (0,0,0)\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y = 0 \text{ et } y+z = 0 \text{ et } z = 0\right\} \\ &= \{(0,0,0)\}. \end{aligned}$$

Donc f *est injective.*

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \left\{f(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \left\{(x+y, y+z, z) : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \left\{x(1,0,0) + y(1,1,0) + z(0,1,1) : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\}. \end{aligned}$$

Ce qui montres que les vecteurs $(1,0,0), (1,1,0)$ *et* $(0,1,1)$ *engendrent* $\operatorname{Im} f$ *et puisqu'ils sont linéairement indépendants (à montrer) alors ils forment une base de* $\operatorname{Im} f$.

$$\left.\begin{array}{c} \operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^3 \\ \dim\ \operatorname{Im} f = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3.$$

Par suite f *est une application surjective.*

7.7 Applications linéaires et familles de vecteurs

Proposition 7.17 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur K et $f : E \to F$ une application linéaire; et soit $E_1 = \langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$ un s. e. v. de E, alors*

$$f(E_1) = f(\langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle) = \langle f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n) \rangle .$$

Preuve 44 *1) Soit $y \in f(E_1) \Longrightarrow \exists x \in E : y = f(x)$. Or $x \in \langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle \Longrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in K, x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$. Donc*

$$\begin{aligned} y = f(x) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \in \langle f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n) \rangle . \end{aligned}$$

2) La deuxième inclusion se démontre de façon analogue.

Corollaire 7.3 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Si $\dim E = n$ et $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E. Alors $f(B) = \{f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)\}$ engendre $\operatorname{Im} f$. Si de plus $f(B)$ est libre alors elle forme une base de $\operatorname{Im} f$.*

Exemple 7.12 *Soit l'application linéaire*

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z) = (x+y, y+z, z) . \end{array}$$

Soit $B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors d'après le corollaire précédent, $f(e_1) = (1,0,1), f(e_2) = (1,1,0)$ et $f(e_3) = (0,0,1)$ engendrent $\operatorname{Im} f$ et comme ils sont linéairement indépendants, alors ils forment une base de $\operatorname{Im} f$. Montrons que $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ sont linéairement indépendants.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : \alpha f(e_1) + \beta f(e_2) + \gamma f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\begin{aligned} \alpha f(e_1) + \beta f(e_2) + \gamma f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3} &\Longrightarrow \alpha(1,0,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(0,0,1) = (0,0,1) \\ &\Longrightarrow (\alpha+\beta, \beta+\gamma, \alpha+\gamma) = (0,0,0) \end{aligned}$$

Donc on aura le système suivant

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases}$$

qui admet l'unique solution $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Proposition 7.18 *Soit $f : E \to F$ et $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ une famille d'éléments de E, alors*

1. *A est liée $\Longrightarrow f(A)$ est liée*
2. *$f(A)$ est libre $\Longrightarrow A$ est libre*
3. *f est injective et A est libre $\Longrightarrow f(A)$ est libre.*

Preuve 45 *1. Puisque A est liée, donc $\exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in K$ non tous nuls tels que : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E$.*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \\ &= f(0_E) = 0_F . \end{aligned}$$

Donc $f(A)$ est liée

2. Evident (se déduit de 1.)

3. On suppose que A est libre et f est injective et on montre que $f(A)$ est libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in K$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) = 0_F$, donc on a

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = 0_F = f(0_E) .$$

Or, f est injective, donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E$, ce qui implique $\lambda_i = 0 \ \forall i \in \{1, ..., n\}$ car A est libre. Ce qui montre que $f(A)$ est aussi libre.

Proposition 7.19 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur K et $f : E \to F$ une application linéaire. Alors*

f est bijective $\Longleftrightarrow \forall B$ une base de E, $f(B)$ est une base de F.

Preuve 46 *$\Longrightarrow$) se déduit de la proposition précédente. En effet, supposons f est bijective et B une base de E, donc en particulier f est injective et B une famille libre de E. Grâce à la proposition précédente, on déduit que $f(B)$ est libre. On a aussi B engendre E, donc $f(B)$ engendre $f(E)$ et donc F car f est surjective.*

$\Longleftarrow$) Soit B une base de E, $f(B)$ est une base de F. Montrons que f est bijective

a) Injectivité de f

Soit $x \in \ker f \subset E$, donc $\exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in K : x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ et $f(x) = 0_F$.

$$\begin{aligned} f(x) = 0_F &\Longrightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = 0_F \\ &\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0_F \\ &\Longrightarrow \lambda_i = 0 \forall i \in \{1, ..., n\} \text{ car } f(B) \text{ est libre.} \end{aligned}$$

Donc $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$. *Par suite,* $\ker f = \{0_E\}$. *Ce qui implique* f *est injective.*

b) Surjectivité de f

Soit $y \in F$, *puisque* $f(B)$ *est une base de* F, *alors* $\exists \alpha_1, ..., \alpha_n \in K$:

$$\begin{array}{rcl} y & = & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i) \\ & = & f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) \\ & = & f(x) \in f(E). \end{array}$$

Donc $F \subset f(E)$. *D'où l'égalité. Par suite,* f *est surjective*

Composition de deux applications linéaires

Soient E, F, G trois $K-$ev et $f : E \to F, g : F \to G$ deux applications linéaires. Alors $g \circ f : E \to G$ est une application linéaire. En effet;

Soient $\alpha, \beta \in K$ et $x, y \in E$

$$\begin{array}{rcl} (g \circ f)(\alpha x + \beta y) & = & g(f(\alpha x + \beta y)) \\ & = & g(\alpha f(x) + \beta f(y)) \\ & = & \alpha g(f(x)) + \beta g(f(x)) \\ & = & \alpha (g \circ f)(x) + \beta (g \circ f)(y). \end{array}$$

Proposition 7.20 *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels sur* K *et* $f : E \to F$ *une application linéaire. Si* f *est un isomorphisme de* E *sur* F, *alors* f^{-1} *est aussi un isomorphisme de* F *vers* E.

Preuve 47 *Si* f *est bijective, alors* f^{-1} *est aussi bijective. Montrons que* f^{-1} *est linéaire. En effet, soient* $\alpha, \beta \in K$ *et* $x', y' \in F$

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}(\alpha x' + \beta y') & = & f^{-1}\left(\alpha f\left(f^{-1}(x')\right) + \beta f\left(f^{-1}(y')\right)\right) \\ & = & f^{-1}\left(f\left[\alpha f^{-1}(x') + \beta f^{-1}(y')\right]\right) \\ & = & \alpha f^{-1}(x') + \beta f^{-1}(y'). \end{array}$$

D'où le résultat.

Définition 7.13 *Deux* $K-$*ev* E *et* F *sont dits isomorphes s'il existe unisomorphisme de* $K-$*ev de* E *sur* F *oubien de* F *sur* E.

Proposition 7.21 *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels sur* K *de dimensions finies. Pour que* E *et* F *soient isomorphes il faut et il suffit que* $\dim E = \dim F$.

7.8 Rang d'une application linéaire

Définition 7.14 *Soient* E *et* F *deux* $K-$*ev de dimensions finies et* $f \in L(E, F)$. *On appelle rang de* f *et on note* $rg(f)$ *l'entier naturel* $rg(f) = \dim(\operatorname{Im} f)$.

Remarque 7.4 *1. Si* B *est une base de* E, *alors pour tout* $f \in L(E, F)$, *on a*

$$rg(f) = \dim f(\langle B \rangle) = \dim \langle f(B) \rangle = rg(f(B)).$$

2. Pour tout $f \in L(E, F)$, *on a*

$$rg(f) \leq \min(\dim E, \dim F).$$

Théorème 7.3 *(Théorème du rang)*

Soient E *et* F *deux* $K-$*ev de dimensions finies et* $f \in L(E, F)$. *Alors, on a*

$$rg(f) = \dim E - \dim \ker f.$$

Proposition 7.22 *Soient* E *et* F *deux* $K-$*ev de dimensions finies et* $f \in L(E, F)$. *Alors*

1. f *est injective* $\Longleftrightarrow \dim(\operatorname{Im} f) = \dim E$
2. f *est surjective* $\Longleftrightarrow \dim(\operatorname{Im} f) = \dim F$.

Corollaire 7.4 *Sur* $\mathbb{R}$, *on considère les espaces vectoriels* $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p$ *et* $f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, *alors*

1. $n < p \Longrightarrow f$ *n'est pas surjective.*
2. $n > p \Longrightarrow f$ *n'est pas injective.*
3. $n = p$, *on ne peut rien dire mais*

$$f \text{ est injective} \Longleftrightarrow f \text{ est surjective} \Longleftrightarrow f \text{ est bijective.}$$

Preuve 48 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire, alors*

$$\dim \mathbb{R}^n = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f.$$

1. Supposons par l'absurde que $n < p$ et f est surjective, alors $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^p = p$. Ce qui implique, $n = p + \dim \ker f$ et $n < p$, contradiction. Donc, f n'est pas surjective.

2. On suppose de même que f est injective et $n > p$. donc $\dim \ker f = 0$. Ce qui implique, $n = 0 + \dim \operatorname{Im} f$ et $\dim \operatorname{Im} f \leq p \Longrightarrow n \leq p$, contradiction. Donc, f n'est pas injective.

3. Si $n = p$, on obtient $n = \dim \operatorname{Im} f + \dim \ker f$ et on ne peut rien dire.

Si de plus, par exemple, f est injective, alors $\dim \ker f = 0$. Ce qui nous donne, $n = \dim \operatorname{Im} f$ et comme $n = p$, on déduit que f est surjective. Par suite, f est bijective.

Raisonnement analogue si f est surjective.

Exercice :
Soit l'application

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z) = (x+2z, y+z, 3x+2z) \end{array}$$

1) Montrer que f est linéaire.
2) Déterminer $Ker\ f$ et $\operatorname{Im} f$ en précisant leurs dimensions.
3) f est-elle bijective ? Justifier.

Solution :

On a

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = (x+2z, y+z, 3x+2z).$$

1) Montrons que f est linéaire
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $X = (x_1, y_1, z_1), Y = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{array}{ll} & f(\alpha X + \beta Y) = f(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2) \\ = & (\alpha x_1 + \beta x_2 + 2(\alpha z_1 + \beta z_2), \alpha y_1 + \beta y_2 + (\alpha z_1 + \beta z_2), 3(\alpha x_1 + \beta x_2) + 2(\alpha z_1 + \beta z_2)) \\ = & (\alpha(x_1 + 2z_1) + \beta(x_2 + 2z_2), \alpha(y_1 + z_1) + \beta(y_2 + z_2), \alpha(3x_1 + 2z_1) + \beta(3x_2 + 2z_2)) \\ = & \alpha(x_1 + 2z_1, y_1 + z_1, 3x_1 + 2z_1) + \beta(x_2 + 2z_2, y_2 + z_2, 3x_2 + 2z_2) \\ = & \alpha f(x_1, y_1, z_1) + \beta f(x_2, y_2, z_2) = \alpha f(X) + \beta f(Y). \end{array}$$

Donc f est linéaire.
2)

$$\begin{array}{lll} Kerf & = & \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}\right\} \\ & = & \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x+2z, y+z, 3x+2z) = (0,0,0)\right\} \\ & = & \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+2z = 0 \text{ et } y+z = 0 \text{ et } 3x+2z = 0\right\} \\ & = & \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \text{ et } \ y = 0 \text{ et } z = 0\right\} \\ & = & \{(0,0,0)\}. \end{array}$$

$Kerf = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \Longrightarrow \dim Kerf = 0$.

$$\begin{array}{lll} \operatorname{Im} f & = & \left\{f(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ & = & \left\{(x+2z, y+z, 3x+2z) / (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ & = & \left\{x(1,0,3) + y(0,1,0) + z(2,1,2) / (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ & = & \left\langle \underbrace{(1,0,3)}_{u_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{u_2}, \underbrace{(2,1,2)}_{u_3} \right\rangle. \end{array}$$

Donc $\{u_1, u_2, u_3\}$ engendre $\operatorname{Im} f$. Montrons que cette famille est libre
Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} / \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\begin{array}{lll} \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} & \Longrightarrow & \alpha(1,0,3) + \beta(0,1,0) + \gamma(2,1,2) = (0,0,0) \\ & \Longrightarrow & (\alpha + 2\gamma, \beta + \gamma, 3\alpha + 2\gamma) = (0,0,0) \\ & \Longrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \alpha + 2\gamma = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ \beta + \gamma = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots(2) \\ 3\alpha + 2\gamma = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots(3) \end{array} \right. \end{array}$$

(3)-(1) donne $2\alpha = 0$ et donc $\alpha = 0$. On remplace α dans (1), on aura $\gamma = 0$. On remplace γ dans (2), on aura $\beta = 0$. Donc $\{u_1, u_2, u_3\}$ est libre.

Finalement $\{u_1, u_2, u_3\}$ est ue base de $\operatorname{Im} f$ et par suite $\dim \operatorname{Im} f = 3$.

3) $Ker f = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \Longrightarrow f$ est injective

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^3 \\ \dim \operatorname{Im} f = 3 = \dim \mathbb{R}^3\end{array}\right\} \Longrightarrow \operatorname{Im} f = \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{espace d'arrivée}} \Longrightarrow f \text{ est surjective.}$$

Finalement f est bijective.
(Remarque $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est linéaire donc f injective $\Longleftrightarrow f$ surjective $\Longleftrightarrow f$ bijective).

Deuxième partie

Analyse et Algèbre II

Chapitre 8

Matrices et déterminants

Dans ce chapitre, $(K, +, .)$ désigne un corps commutatif, en pratique $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$. On note par 1_K l'élément neutre pour la loi "."

Introduction

En mathématiques, les matrices servent à interpréter en termes de calculs operationnels les résultats théoriques de l'algèbre linéaire. Toutes les disciplines étudiant des phénomènes linéaires utilisent des matrices.

8.1 Généralités sur les matrices

8.1.1 Définitions et notations

Définition 8.1 *On appelle matrice à n lignes et p colonnes et à coefficients dans K l'objet A de np éléments de K de la forme*

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1j} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2j} & ... & a_{2p} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ij} & ... & a_{ip} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nj} & ... & a_{np} \end{pmatrix}$$

$i \in \{1, 2, ..., n\}$ désigne les lignes, $j \in \{1, 2, ..., p\}$ désigne les colonnes. L'élément a_{ij} est l'élément de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne.

Notations

1. L'ensemble des matrices de n lignes et de p colonnes et à coefficients dans K est noté $M_{n,p}(K)$.

2. Si $n = p$, la matrice A est dite matrice carrée d'ordre n et l'ensemble des matrices carrées d'ordre n est noté $M_n(K)$.

3. La matrice carrées d'ordre n dont tous les termes diagonaux a_{ii} sont égaux à 1 et $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ est appelée matrice identité d'ordre n et on la note I_n et on écrit

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

4. Pour tous $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$, la matrice de $M_{n,p}(K)$ dont le $(ij)^{\text{ème}}$ terme vaut 1 et tous les autres sont nuls est appelée matrice élémentaire, on la note E_{ij}.

5. La matrice dont tous les éléments sont nuls est dite matrice nulle. On la note $0_{M_{n,p}(K)}$.

8.1.2 Opérations sur les matrices

a) Egalité de deux matrices

Soient $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{n,p}(K)$.

$A = B \Longleftrightarrow a_{ij} = b_{ij}\ \forall 1 \leq i \leq n, \forall 1 \leq j \leq p$.

b) Somme de deux matrices

Soient $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{n,p}(K)$. On définit la somme de A et B et on note $A + B$ la matrice $A + B = (c_{ij}) \in M_{n,p}(K)$ tel que

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall 1 \leq i \leq n, \forall 1 \leq j \leq p.$$

c) Multiplication d'une matrice par un scalaire
Soient $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(K)$ et $\lambda \in K$, alors $\lambda A = \lambda (a_{ij}) = (\lambda a_{ij})\quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$.

Exemple 8.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}, \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda & 2\lambda \\ 3\lambda & 4\lambda \end{pmatrix},\ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

$A + C$ et $B + C$ n'existent pas car $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ et $C \in M_{2,3}(\mathbb{R})$.

Proposition 8.1 *$(M_{n,p}(K), +, .)$ est un $K-$e.v. de dimension finie égale à np. Une base de $(M_{n,p}(K), +, .)$ est formée de toutes les matrices élémentaires $E_{ij}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$ de $M_{n,p}(K)$.*

d) produit de deux matrices

Définition 8.2 *Soient $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(K)$ et $B = (b_{jk}) \in M_{p,q}(K)$ (c'est à dire le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B). On définit alors le produit de A et B dans cet ordre par la matrice $C = A \times B = (c_{ik})$ de $M_{n,q}(K)$ tel que*

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}.b_{jk}.$$

Remarques importantes
1. Si le nombre de colonnes de A est différent du nombre de lignes de B, alors le produit $A \times B$ n'est pas défini.
2. En général, et lorsque le produit est bien défini, on a

$$A \times B \neq B \times A.$$

3. Le produit des matrices carrées d'ordre n est toujours défini.
4. L'ensemble $(M_n(K), +, \times)$ est un anneau unitaire dont l'élément neutre pour la multiplication est la matrice identité I_n.
5. Cet anneau n'est pas intègre car pour

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

on a

$$A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $A \neq 0_{M_2(\mathbb{R})}$ et $B \neq 0_{M_2(\mathbb{R})}$.

Exemple 8.2 *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Alors

$$A \times B = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ 38 & 21 \end{pmatrix}, B \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 14 & 19 & 24 \\ 8 & 13 & 18 \end{pmatrix},$$
$$A \times C = \begin{pmatrix} 16 & 12 & 17 \\ 37 & 30 & 41 \end{pmatrix},$$

tandis que $C \times A$ n'est pas défini car le nombre de colonnes de C est différent du nombre de lignes de A.

Propriétés
Soient A, B et C trois matrices. Lorsque le produit est bien défini, on a
1. $A(B + C) = AB + AC$
2. $(AB)C = A(BC)$
3. En général, $AB \neq BA$.

Matrices carrées inversibles

Définition 8.3 *Soit $A \in M_n(K)$, on dit que A est inversible si et seulement si il existe $A' \in M_n(K)$ telle que*

$$AA' = A'A = I_n.$$

Si A est inversible alors A' est unique et est appelée inverse de A (notée A^{-1}).

Exemple 8.3 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

trouver A^{-1}. On a $A \in M_3(\mathbb{R})$, donc $A' \in M_3(\mathbb{R})$, c'est à dire elle est de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned} & AA' = I_3 \\ \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} x_1 + 2y_1 & x_2 + 2y_2 & x_3 + 2y_3 \\ y_1 + z_1 & y_2 + z_2 & y_3 + z_3 \\ x_1 + z_1 & x_2 + z_2 & x_3 + z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par identification, on obtient

$$(I) \begin{cases} x_1 + 2y_1 = 1 \\ y_1 + z_1 = 0 \\ x_1 + z_1 = 0, \end{cases} \quad (II) \begin{cases} x_2 + 2y_2 = 0 \\ y_2 + z_2 = 1 \\ x_2 + z_2 = 0, \end{cases} \quad (III) \begin{cases} x_3 + 2y_3 = 0 \\ y_3 + z_3 = 0 \\ x_3 + z_3 = 1. \end{cases}$$

Après calculs, on obtient

$$\begin{aligned} (I) &\Longleftrightarrow x_1 = \tfrac{1}{3}, y_1 = \tfrac{1}{3}, z_1 = -\tfrac{1}{3} \\ (II) &\Longleftrightarrow x_2 = \tfrac{-2}{3}, y_2 = \tfrac{1}{3}, z_2 = \tfrac{2}{3} \\ (III) &\Longleftrightarrow x_3 = \tfrac{2}{3}, y_3 = \tfrac{-1}{3}, z_3 = \tfrac{1}{3}. \end{aligned}$$

Finalement

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 8.2 *Soient A, B deux matrices inversibles de $M_n(K)$, alors la matrice AB est aussi inversible et*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Preuve 49 *On pose $C = B^{-1}A^{-1}$, il suffit de démontrer que*

$$(AB)\,C = C\,(AB) = I_n.$$

On a

$$\begin{aligned} (AB)\,C &= (AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) \\ &= A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} \\ &= AI_nA^{-1} \\ &= AA^{-1} = I_n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} C\,(AB) &= \left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) \\ &= B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B \\ &= B^{-1}I_nB \\ &= B^{-1}B = I_n. \end{aligned}$$

Transposée d'une matrice

Définition 8.4 *Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(K)$. On appelle transposée de A la matrice notée ${}^tA$ de $M_{p,n}(K)$ définie par ${}^tA = (a_{ji})$.*

Exemple 8.4 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

alors

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Proposition 8.3 *1.* $\forall A \in M_{n,p}(K), {}^t({}^tA) = A$.
2. $\forall \alpha \in K, \forall A \in M_{n,p}(K), {}^t(\alpha A) = \alpha ({}^tA)$.
3. $\forall A, B \in M_{n,p}(K), {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$.
4. $\forall A \in M_{n,p}(K), \forall B \in M_{p,q}(K); {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.
5. $\forall A \in M_n(K)$ *inversible,* $\left({}^tA^{-1}\right) = \left({}^tA\right)^{-1}$.
6. $rg(A) = rg({}^tA)$.

Matrices symétriques

Définition 8.5 *Une matrice carrée est dite symétrique si et seulement si* ${}^tA = A$.

Exemple 8.5 *La matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & -1 \\ 4 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

est symétrique.

Matrices antisymétriques

Définition 8.6 *Une matrice carrée* $A \in M_n(K)$ *est dite antisymétrique si et seulement si* ${}^tA = -A$.

Matrices triangulaires

Définition 8.7 *Soit* $A \in M_n(K)$.
1) On dit que A est triangulaire supérieure si et seulement si

$$\forall (i,j) \in \{1,2,...,n\}^2, i > j \Longrightarrow a_{ij} = 0.$$

exemple :
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
2) On dit que A est triangulaire inférieure si et seulement si

$$\forall (i,j) \in \{1,2,...,n\}^2, i < j \Longrightarrow a_{ij} = 0.$$

exemple :
$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
3) On dit que A est diagonale si et seulement si

$$\forall (i,j) \in \{1,2,...,n\}^2, i \neq j \Longrightarrow a_{ij} = 0.$$

exemple :
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
4) On appelle trace d'une matrice carrée $B \in M_n(K)$ *le nombre* $Tr(B) = \Pi_{i=1}^n a_{ii}$.

Matrices équivalentes, matrices semblables

Définition 8.8 *Soient* A, B *deux matrices de* $M_{n,p}(K)$. *On dit que A et B sont équivalentes s'il existe deux matrices carrées inversibles* $P \in M_p(K)$ *et* $Q \in M_n(K)$ *telles que* $B = Q^{-1}AP$.

Définition 8.9 *Soient* A, B *deux matrices carrées de* $M_n(K)$. *On dit que A et B sont semblables s'il existe une matrice carrée P inversible d'ordre n telle que* $B = P^{-1}AP$.

8.2 Matrices et applications linéaires

Définition 8.10 *Soient E, F deux $K-$e.v. tels que $\dim E = p$ et $\dim F = n$ et $f \in L(E,F)$. Soient $B = \{e_1, e_2, ..., e_p\}$ une base de E et $C = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ une base de F. Pour chaque j de $\{1, 2, ..., p\}$, écrivons le vecteur $f(e_j)$ dans la base C comme suit*

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i.$$

Alors, la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de $f(e_j)$ pour $1 \leq j \leq p$ est appelée matrice associée à l'application f relativement aux bases B et C, et on écrit

$$M_f(B,C) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1j} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2j} & ... & a_{2p} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ij} & ... & a_{ip} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nj} & ... & a_{np} \end{pmatrix}$$

Exemple 8.6 *Soit*

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z) = (x+y-z, 2x-y+z). \end{array}$$

f est linéaire (à vérifier).

$B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ une base de $\mathbb{R}^3$.

$C = \{b_1 = (1,0), b_2 = (0,1)\}$ une base de $\mathbb{R}^2$.

On a

$$\begin{array}{l} f(e_1) = (1,2) = 1b_1 + 2b_2 \\ f(e_2) = (1,-1) = 1b_1 - 1b_2 \\ f(e_3) = (-1,1) = -1b_1 + 1b_2. \end{array}$$

Donc,

$$M_f(B,C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 8.7 *Soit*

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = (2x+y, -y, z). \end{array}$$

f est linéaire (à vérifier).

$B = \{u_1 = (-1,1), u_2 = (2,1)\}$ une base de $\mathbb{R}^2$ (à vérifier).

$C = \{w_1 = (1,1,1), w_2 = (1,1,2), w_3 = (1,2,3)\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ (à vérifier).

On a $f(u_1) = f(-1,1) = (-1,-1,-1)$.

$$\begin{array}{rcl} (-1,-1,-1) & = & \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 \\ & = & \alpha_1 (1,1,1) + \alpha_2 (1,1,2) + \alpha_3 (1,2,3) \\ & = & (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3). \end{array}$$

On aura le système suivant

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = -1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = -1 \end{cases}$$

qui admet l'unique solution $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (-1,0,0)$.

Donc $(-1,-1,-1) = -1(1,1,1) + 0(1,1,2) + 0(1,2,3)$.

On a $f(u_2) = f(2,1) = (5,-1,2) = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \beta_3 w_3$.

$$\begin{array}{rcl} (5,-1,2) & = & \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \beta_3 w_3 \\ & = & \beta_1 (1,1,1) + \beta_2 (1,1,2) + \beta_3 (1,2,3) \\ & = & (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3, \beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3, \beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3). \end{array}$$

On aura le système suivant

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 5 \\ \beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 = -1 \\ \beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3 = 2 \end{cases}$$

qui admet l'unique solution $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (2,9,-6)$. Donc,

$$M_f(B,C) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 9 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}..$$

Proposition 8.4 *Soient E, F, G trois $K-$espaces vectoriels. B, C et D des bases de E, F, G respectivement, soit $f \in L(E,F)$, $g \in L(F,G)$ alors $(g \circ f) \in L(E,G)$ et de plus*

$$M_{g\circ f}(B,D) = M_g(C,D).M_f(B,C).$$

Proposition 8.5 *Soit E un $K-$e.v. de dimension n et $f \in L(E,E)$ et $A \in M_n(K)$ la matrice associée à f relativement à n'importe quelle base de E, alors*

$$A \text{ est inversible} \iff f \text{ est bijective.}$$

De plus, A^{-1} est la matrice associée à l'application f^{-1} relativement aux bases prises.

Rang d'une matrice

Définition 8.11 *Soit $A \in M_{n,p}(K)$. On appelle rang de A le nombre maximum de vecteurs colonnes de A qui sont linéairement indépendants et on a $rg(A) \leq \min(n,p)$.*

Proposition 8.6 *Soient E, F deux $K-$espaces vectoriels. B, C des bases de E, F respectivement. Soit $f \in L(E,F)$ et $A = M_f(B,C)$, alors $rg(f) = rg(A)$.*

8.3 Matrice de passage, changement de bases

8.3.1 Matrice de passage

Définition 8.12 *Soient E un $K-$e.v. de dimension n, B_1, B_2 deux bases de E. On appelle matrice de passage de B_1 à B_2 la matrice de $M_n(K)$ dont les colonnes sont formées des composantes des vecteurs de B_2 exprimés dans la base B_1, on la note $Pass(B_1, B_2)$, c'est à dire, si $B_1 = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ et $B_2 = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ alors*

$$\begin{gathered}
b_1 = \alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + ... + \alpha_{n1}e_n \\
b_2 = \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + ... + \alpha_{n2}e_n \\
.... \\
b_n = \alpha_{1n}e_1 + \alpha_{2n}e_2 + ... + \alpha_{nn}e_n
\end{gathered}$$

et

$$Pass(B_1,B_2) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & ... & ... & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & ... & ... & \alpha_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & ... & ... & ... & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Remarque 8.1 *$Pass(B_1,B_2) = M_{Id}(B_2,B_1)$.*

Exemple 8.8 *Soient $E = \mathbb{R}^3$,*

$$B_1 = \{e_1 = (1,1,0), e_2 = (0,1,1), e_3 = (1,1,1)\}$$

et

$$B_2 = \{b_1 = (2,1,0), b_2 = (0,2,1), b_3 = (1,1,1)\}$$

deux bases de $\mathbb{R}^3$ (à vérifier).

Déterminer $Pass(B_1,B_2)$. On a

$$\begin{cases} b_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \\ b_2 = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 \\ b_3 = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3 \end{cases} \overset{\text{après calculs}}{\Longrightarrow} \begin{cases} b_1 = e_1 - e_2 + e_3 \\ b_2 = e_1 + 2e_2 - e_3 \\ b_3 = 0e_1 + 0e_2 + e_3. \end{cases}$$

Donc

$$Pass(B_1,B_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 8.7 ***(quelques propriétés des matrices de passage)***

Soient E un $K-$e.v. de dimension n, B_1, B_2, B_3 trois bases de E, alors

1. *$Pass(B_1,B_3) = Pass(B_1,B_2) \times Pass(B_2,B_3)$.*
2. *$Pass(B_1,B_1) = I_n$ (matrice identité)*
3. *$P = Pass(B_1,B_2)$ est inversible et $P^{-1} = Pass(B_2,B_1)$.*

8.3.2 Changement de bases

Changement de bases pour un vecteur

Soient E un $K-$e.v. de dimension n, B_1, B_2 deux bases de E et $P = Pass\,(B_1, B_2)$. Soit $x \in E$ et considérons $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ les composantes de x dans la base B_1 et $b_1, b_2, ..., b_n$ les composantes de x dans la base B_2. Alors

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ ... \\ \alpha_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} \text{ ou bien } \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ ... \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Exemple 8.9 *Soient* $B_1 = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}, B_2 = \{b_1 = (1,2), b_2 = (2,1)\}$ *deux bases de* $\mathbb{R}^2$. *On a*

$$P = Pass\,(B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si (x, y) *sont les coordonnées d'un vecteur* X *dans la base* B_1, *les composantes du même vecteur* X *dans la base* B_2 *sont* (γ_1, γ_2) *où*

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y \end{pmatrix}$$

Changement de bases pour une applications linéaire
a) Cas d'un endomorphisme

Théorème 8.1 *Soient* E *un* $K-$*e.v.*, $f : E \to E$ *une application linéaire,* B, B' *deux bases de* E *et* $P = Pass\,(B, B')$. *Alors,*

$$M_f\,(B', B') = P^{-1} M_f\,(B, B)\,P.$$

c'est à dire, deux matrices associées à un endomorphisme suivant des bases différentes sont semblables.
b) Cas général

Théorème 8.2 *Soient* E, F *deux* $K-$*e.v.*, $f : E \to F$ *une application linéaire,* B, B' *deux bases de* E, C, C' *deux base de* F *et* $P = Pass\,(B, B')$, $Q = Pass\,(C, C')$ *(oubien* $Q^{-1} = Pass\,(C', C)$*). Alors,*

$$M_f\,(B', C') = Q^{-1} M_f\,(B, C)\,P.$$

c'est à dire, deux matrices associées à une application linéaire suivant des bases différentes sont équivalentes.

8.4 Déterminants

Attention : Les déterminants ne concernent que les matrices carrées

Définition 8.13 *Soit* $A = (a_{ij}) \in M_n\,(K)$, *le déterminant de* A *est l'élément de* K *noté* $\det A$ *ou* $\begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{n1} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$

1. Comment calculer $\det A$ **?**

Exemple 8.10 *déterminant d'ordre 2*

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2\,(K)$. *Alors* $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

Exemple 8.11 *déterminant d'ordre* 3

Calculer $\det A$ *où* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1) Première méthode : *Développement suivant la troisième ligne*

$\det A = 0 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2.$

2) Deuxième méthode : *Développement suivant la troisième colonne*

$\det A = 0 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2.$

Cas général

Soit A une matrice de $M_n(K)$. On note A_{ij} la matrice d'ordre $(n-1)$ déduite de A en supprimant la i$^{\text{ème}}$ ligne et la j$^{\text{ème}}$ colonne. On appelle déterminant de A développé suivant la i$^{\text{ème}}$ ligne le scalaire

$$\begin{aligned}\det A &= (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det A_{i2} \\ &\quad +... + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in} \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik}.\end{aligned}$$

On appelle déterminant de A développé suivant la j$^{\text{ème}}$ colonne le scalaire

$$\begin{aligned}\det A &= (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} \det A_{2j} \\ &\quad +... + (-1)^{n+j} a_{nj} \det A_{nj} \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det A_{kj}.\end{aligned}$$

Remarque 8.2 *Il est préférable de calculer le déterminant suivant la rangée (ligne ou colonne) qui contient beaucoup de zéros.*

La régle de Sarrus

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$
$= a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - a_2c_3b_1$

Exemple 8.12 $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -48.$

Propriétés des déterminants

1. $\det I_n = 1$.
2. $\forall \alpha \in K, \forall A \in M_n(K), \det(\alpha A) = \alpha^n \det A$.
3. $\forall A, B \in M_n(K), \det(AB) = \det A \det B$.
4. A est inversible $\iff \det A \neq 0$ et $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det A}$.
5. $\forall A \in M_n(K), \det({}^tA) = \det A$.
6. $\det A = 0$ si A possède deux colonnes égales.
7. $\det A = 0$ si une des colonnes de A est combinaison linéaire de plusieures autres colonnes.
8. Le déterminant de A ne change pas de valeur si on ajoute à une colonne une combinaison linéaires d'autres colonnes.

Remarque 8.3 *Les propriètés 6, 7 et 8 restent vraies si on remplace colonnes par lignes.*

Corollaire 8.1 *a) Un déterminant est nul si l'une de ses colonnes est nulle.*
b) Un déterminant se décompose en somme suivant la formule

$$\begin{aligned}\det\left(C_1, ..., C'_{i_1} + C'_{i_2}, ..., C_n\right) &= \det\left(C_1, ..., C'_{i_1}, ..., C_n\right) \\ &\quad + \det\left(C_1, ..., C'_{i_2}, ..., C_n\right)\end{aligned}$$

c) $\det(C_1, ..., \alpha C_i, ..., C_n) = \alpha \det(C_1, ..., C_i, ..., C_n)$.
d) Pour qu'un déterminant soit nul il faut et il suffit que la famille des colonnes (resp. des lignes) soit liée.

Exemple 8.13 $\begin{vmatrix} 5 & 14 & -3 & 11 \\ 15 & 18 & -9 & -13 \\ -10 & -10 & 6 & 4 \\ 20 & 8 & -12 & 6 \end{vmatrix} = 5 \times (-3) \begin{vmatrix} 1 & 14 & 1 & 11 \\ 3 & 18 & 3 & -13 \\ -2 & -10 & -2 & 4 \\ 4 & 8 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$
car les colonnes 1 et 3 sont égales.

Calcul de déterminants de matrices particulières

Soit A une matrice triangulaires inférieure ou supérieure, alors $\det A = \Pi_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Calcul de l'inverse d'une matrice en utilisant le déterminant

La formule $AA^{-1} = I_n$ permet de calculer l'inverse A^{-1} de la matrice inversible A. On détermine ici une formule plus performante de calcul de A^{-1}. Cette formule utilise les comatrices.

Définition 8.14 *Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. On appelle cofacteur de la place (i, j) dans A et on note c_{ij} le nombre*

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

où A_{ij} la matrice d'ordre $(n-1)$ déduite de A en supprimant la i$^{\text{ème}}$ ligne et la j$^{\text{ème}}$ colonne.

Définition 8.15 *On appelle comatrice de A la matrice carrée d'ordre n définie par*

$$comA = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

où c_{ij} est le cofacteur de la place (i,j) dans A.

Théorème 8.3 *Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, alors*

$$\begin{aligned} A.^t(comA) &= {}^t(comA).A \\ &= (\det A).I_n \end{aligned}$$

où I_n est la matrice identité.

Corollaire 8.2 *Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ inversible, alors*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t(comA).$$

Exemple 8.14 *Soit la matrice de $M_3(\mathbb{R})$*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer A^{-1} si elle existe.
On a $\det A = 2$, donc A^{-1} existe.

$$ComA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -5 \end{pmatrix}, \quad {}^t(comA) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Exercices

Exercices 1 :

Soit A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R}.$$

a) Calculer $A^n, n \in \mathbb{N}^*$.
b) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.
c) En déduire A^n, pour $n \in \mathbb{Z}^*$.

Exercices 2 :

Calculer les déterminants des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} \sin^2\alpha & \cos 2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos 2\beta & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos 2\gamma & \cos^2\gamma \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix}$$

Exercices 3 :

Déterminer le rang des matrices suivantes. Etudier si elles sont inversibles. Si oui calculer l'inverse

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \\ C &= \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercices 4 :

1) Calculer le déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

a) par la règle de Sarrus
b) En le développant suivant la première colonne puis la troisième ligne.
c) En faisant apparaître des zéros dans la première ligne.

Exercices 5 :

Soit le déterminant :

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 2 \\ 1 & 2-x & -1 \\ -1 & 1 & 4-x \end{vmatrix}$$

1) Calculer $\Delta(x)$ par la règle de Sarrus.
2) Calculer $\Delta(x)$ en le factorisant.

Chapitre 9

Systèmes d'équations linéaires et diagonalisation

L'une des nombreuses applications des déterminants est la résolution des systèmes linéaires.

9.1 Généralités

Définition 9.1 *On appelle système de n équations linéaires à p inconnues et à coefficients dans un corps K, tout système de la forme*

$$(S)\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p = b_2, \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{np}x_p = b_n, \end{array}\right.$$

$(n = p, n > p$ *ou* $n < p)$, *où les* x_i *sont les inconnues, les* a_{ij} *et les* b_i *sont des éléments de* K.

Appellations :

1) On appelle solution du système (S) tout élément $(y_1, y_2, ..., y_p)$ vérifiant (S).

2) On appelle système homogène associé à (S) le système tiré de (S) avec $b_i = 0, i = 1, ..., n$.

3) On appelle matrice associée à (S) la matrice des coefficients des x_i

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & ... & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ... & ... & ... & a_{2p} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & ... & ... & a_{ip} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & ... & ... & a_{np} \end{pmatrix}$$

Rang d'un système linéaire

A la matrice A associée au système (S), correspond l'application linéaire $f : K^p \to K^n$ par rapport aux bases canoniques de K^n et K^p. On pose $b = (b_1, b_2, ..., b_n) \in K^n, x = (x_1, x_2, ..., x_p) \in K^p$, alors (S) se met sous la forme fonctionnelle $f(x) = b$ et sous forme matricielle

$$AX = B, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_p \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$$

Définition 9.2 *On appelle rang du système linéaire (S) le rang de sa matrice associée rg(S)=rg(A)=rg(f).*

9.2 Systèmes de Cramer

Le système (S) est dit de Cramer si et seulement si A est carrée et inversible c'est à dire $n = p = r$. Dans ce cas, (S) admet une unique solution donnée par

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_n & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & ... & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & b_n & ... & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A},$$

$$...,$$

$$x_n = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_n & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A},$$

c'est les formules de Cramer.

Exemple 9.1 *Résoudre le système linéaire suivant :*

$$(S) \begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ 4x + 4y - 3z = 3 \\ -2x + 3y - z = 1. \end{cases}$$

On a

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$\det A = 20 \neq 0$ *donc* (S) *est un système de Cramer et admet une solution unique donnée par*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{20} = 1,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{20} = 2,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{20} = 3.$$

9.3 Autres systèmes

Cas où $n = p$ et $r < n$

Exemple 9.2 *Soit le système*

$$(1) \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 10, \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 14, \\ 2x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 3x_4 = 10, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 1. \end{cases}$$

La matrice associée à (1) *est*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & 9 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

on trouve $\det A = 0$, *donc* A *est de rang* $r < 4$. *Le système* (1) *n'est pas de Cramer. Parmi les matrices d'ordre* 3 *extraites de* A, *on trouve*

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

de déterminant égal à 2. *Il en résulte que* $rg(M) = 3$.

N.B. Le rang d'une matrice A ***est l'ordre du déterminant non nul, le plus élevé, extrait de*** A.

Le système associé à M *est*

$$(2) \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 10 - 3x_4, \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 = 14 - 4x_4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 10 - 3x_4. \end{cases}$$

Les trois inconnues x_1, x_2, x_3 *sont les inconnues principales et* x_4 *est un paramètre.* (2) *admet une solution (paramétrique) unique donnée par*

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 - 3x_4 & 1 & 2 \\ 14 - 4x_4 & -1 & -3 \\ 10 - 3x_4 & 4 & 9 \end{vmatrix}}{2} = 3 - x_4,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 10 - 3x_4 & 2 \\ 5 & 14 - 4x_4 & -3 \\ 2 & 10 - 3x_4 & 9 \end{vmatrix}}{2} = 1 + 2x_4,$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 10 - 3x_4 \\ 5 & -1 & 14 - 4x_4 \\ 2 & 4 & 10 - 3x_4 \end{vmatrix}}{2} = -x_4.$$

On porte cette solution (x_1, x_2, x_3) *dans la quatrième équation du système* (1)

$$(3 - x_4) - 2(1 + 2x_4) - (-x_4) + 4x_4 = 1.$$

La solution (x_1, x_2, x_3) *vérifie le système* (1) *donc c'est la solution paramétrique de* (1). *On dit aussi que le système* (1) *admet une infinité de solutions*

$$\{(3 - x_4, 1 + 2x_4, -x_4, x_4), x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Cas où $p < n$

Exemple 9.3 *Soit le système*

$$(1) \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - y = 5 \\ x - 5y = -11. \end{cases}$$

On a $n = 3, p = 2$ *donc le système n'est pas de Cramer et par suite* $r \leq 2$. *Parmi les matrices d'ordre* 2 *extraites de la matrice associée au système* (1), *on trouve*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \ \det M = -11, \ rg(M) = 2.$$

M *est associée au système*

$$(2) \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - y = 5, \end{cases}$$

qui admet une unque solution $(x, y) = (2, 1)$. *La solution* $(2, 1)$ *ne vérifie pas l'équattion* $x - 5y = -11$. *Donc le système* (1) *n'admet pas de solutions.*

Cas où $p > n$

Exemple 9.4 *Soit le système*

$$(1) \begin{cases} 3x - 2y + 2z + 3u - t = 4 \\ 5x + y - 3z + 2u + 6t = -7 \\ x - 5y + 7z + 4u - 8t = 11. \end{cases}$$

On a $n = 3, p = 5$ *donc le système n'est pas de Cramer et par suite* $r \leq 3$. *Tous les déterminants d'ordre 3 extraits de la matrice associée au système* (1) *sont nuls, donc* $r < 3$. *Parmi les matrices d'ordre* 2 *extraites de la matrice associée au système* (1), *on trouve*

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \ \det M = 13, \ rg(M) = 2.$$

M est associée au système

$$(2)\begin{cases} 3x-2y=4-2z-3u+t \\ 5x+y=-7+3z-2u-6t, \end{cases}$$

x, y sont les inconnues principales, z, u, t sont des paramètres. Le système (2) admet la solution unique

$$\begin{aligned} x &= -\tfrac{1}{13}\left(10+4z+7u+11t\right) \\ y &= -\tfrac{1}{13}\left(-41+59z+9u-23t\right). \end{aligned}$$

Cette solution ne vérifie pas la troisième équation de (1). Donc le système (1) n'admet pas de solutions.

9.4 Systèmes linéaires homogènes

Les systèmes linéaires homogènes admettent au moins une solution, la solution nulle $x_1 = x_2 = ... = x_p$. Dans certains cas, il ya des solutions non nulles.

Exemple 9.5 *Résoudre le système*

$$(1)\begin{cases} 4x-3y-z=0 \\ 2x+7y+5z=0 \\ 3x-y+4z=0 \\ 5x-2y-3z=0, \end{cases}$$

$n = 4, p = 3, r \leq 3$. On a la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 2 & 7 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

est de déterminant non nul, donc $r = 3$. Le système associé à M

$$\begin{cases} 4x-3y-z=0 \\ 2x+7y+5z=0 \\ 3x-y+4z=0 \end{cases}$$

admet une unique solution (la solution nulle). Finalement, le système (1) admet l'unique solution $(0, 0, 0)$.

Exemple 9.6 *Résoudre le système*

$$(1)\begin{cases} 3x+2y+2z-t=0 \\ 4x-y-5z+2t=0 \\ 2x+5y+9z-4t=0, \end{cases}$$

$n = 3, p = 4, r \leq 3$. Tous les déterminants d'ordre 3 extraits de (1) sont nuls. Soit

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det M = -11.$$

Le système associé à M

$$\begin{cases} 3x+2y=-2z+t \\ 4x-y=5z-2t, \end{cases}$$

admet une unique solution paramétrique donnée par

$$x = \frac{1}{11}\left(8z-3t\right), y = \frac{1}{11}\left(-23z+10t\right).$$

On a x, y vérifient la troisième équation. Donc le système (1) admet une infinité de solutions

$$\left(\frac{1}{11}\left(8z-3t\right), \frac{1}{11}\left(-23z+10t\right), z, t\right), \quad z, t \in \mathbb{R}.$$

Diagonalisation

La matrice d'un endomorphisme f d'un K espace vectoriel E de dimension n est de la forme $A = (a_{ij})$, dépendant de la base choisie. Les calculs sur A sont facilités s'il ya un maximum d'éléments $a_{ij} = 0$. La recherche d'une matrice semblable à A et contenant un maximum de zéros est le problème de la réduction des matrices. Dans le meilleur des cas, il existe une base (e_i) de E par rapport à laquelle la matrice de f est diagonale ; on dit que la matrice est diagonalisable. Sinon, elle peut être réduite à la forme triangulaire.

La réduction des matrices a des applications nombreuses : géométrie, suites numériques, équations différentielles, etc ....

9.5 Valeurs et vecteurs propres

Définition 9.3 *Soient E un $K-$e.v. et f un endomorphisme de E. Un scalaire $\lambda \in K$ est dit valeur propre de f si*

$$\exists x \in E, x \neq 0_E : \quad f(x) = \lambda x.$$

Dans ce cas, x est dit vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Exemple 9.7 *Soit la fonction f définie par*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = (2x+y,-y). \end{array}$$

On a $f(1,0) = 2(1,0)$, donc 2 est une valeur propre de f et $(1,0)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 2$.

Définition 9.4 *Pour une matrice A de $M_n(K)$, on dit que λ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur colonne $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$. Dans ce cas, X est dit vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.*

Exemple 9.8 *Soit la matrice de $M_3(\mathbb{R})$*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

et considérons les deux vecteurs

$$V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$AV_1 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$AV_2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Donc $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$ sont deux valeurs propres de A ; V_1 et V_2 sont deux vecteurs propres de A associés à λ_1 et λ_2 respectivement.

Remarque 9.1 *Pour une matrice A associée à un endomorphisme f, on a λ est une valeur propre de A si et seulement si λ est une valeur propre de f.*

Définition 9.5 ***(sous-espace propre)*** *Soit λ une valeur propre de f, alors l'ensemble noté*

$$\begin{aligned} E_\lambda &= \{x \in E / f(x) = \lambda x\} \\ &= \ker(f - \lambda Id_E) \end{aligned}$$

est un sous espace vectoriel de E. C'est le sous espace propre de f associé à la valeur propre λ.

Remarque 9.2 *De même $E_\lambda = \{X \in E / AX == \lambda X\}$ est le sous espace propre de la matrice A associé à la valeur propre λ.*

Théorème 9.1 *A un vecteur propre $x \neq 0_E$ correspond une valeur propre unique.*

Preuve 50 *Supposons qu'il existe deux valeurs propres λ_1 et λ_2 correspondant à $x \neq 0_E$. Donc $f(x) = \lambda_1 x$ et $f(x) = \lambda_2 x$. Cela implique que $(\lambda_1 - \lambda_2) x = 0_E$ et par suite $\lambda_1 = \lambda_2$ puisque $x \neq 0_E$.*

Théorème 9.2 *A deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 de f correspondent deux sous espaces propres E_{λ_1} et E_{λ_2} tels que $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0_E\}$.*

Preuve 51 *Soit $x \in E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2}$, alors $f(x) = \lambda_1 x = \lambda_2 x$. D'où $(\lambda_1 - \lambda_2) x = 0_E$, l'hypothèse $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entraine $x = 0_E$. Par suite, $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0_E\}$.*

Techniques de recherche des valeurs propres

Polynômes caractéristiques

Soit E un $K-$ espace vectoriel de dimension n, $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E. On note par A la matrice associée à f relativement à cette base, c'est à dire

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & ... & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & ... & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & ... & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & ... & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres λ vérifient $(f - \lambda Id_E)$ non injective, c'est à dire $\ker(f - \lambda Id_E) \neq 0_E$ ou bien $\det(A - \lambda Id_E) = 0$.

$$\det(A - \lambda Id_E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ... & ... & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ... & ... & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & ... & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & ... & ... & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = P_A(\lambda).$$

Le développement de ce déterminant montre que $P_A(\lambda)$ est un polynôme de degré n en λ.

Définition 9.6 *$P_A(\lambda)$ est appelé polynôme caractéristique de l'endomorphisme f (ou bien de la matrice A). $P_A(\lambda) = 0$ est l'équation caractéristique de f (ou de A) et les racines de cette équation sont les valeurs propres de f (ou de A).*

Exemple 9.9 *Soit la matrice de $M_3(\mathbb{R})$*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs propres de A et les sous espaces propres associés. On a

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2.$$

Les valeurs propres de A sont alors

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \text{ v.p. double} \\ \lambda_2 = -1 \text{ v.p. simple.} \end{cases}$$

Les sous espaces propres

$X \in E_{\lambda_1}, X = ^t(x, y, z) \Leftrightarrow AX = \lambda_1 X = -X$. Donc

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

Ceci est équivalent à

$$\begin{cases} -x + 4y + 0z = -x \\ 0x + y + 0z = -y \\ 2x - 4y + z = -z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \text{et} \\ z = -x. \end{cases}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : AX = -X\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0,\ z = -x\} \\ &= \{(x, 0, -x) : x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 0, -1) : x \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1, 0, -1) \rangle. \end{aligned}$$

De manière analogue, on trouve

$$E_{\lambda_2} = \langle (2, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle.$$

9.6 Diagonalisation d'endomorphismes et de matrices

Etant donnée une matrice A de $M_n(K)$, existe-il une matrice B semblable à A telle que B est la plus simple possible (contient le plus grand nombre de zéros) ? $\exists?B \in M_n(K), \exists?P$ inversible : $B = P^{-1}AP$ avec B la plus simple possible.

Définition 9.7 *Une matrice A de $M_n(K)$ est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. De même, soit f un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E de dimension finie n. f est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice associée est diagonalisable.*

Proposition 9.1 *Soit f un endomorphisme de E, alors*
f est diagonalisable $\Longleftrightarrow$ E admet une base de vecteurs propres de f.

Proposition 9.2 *Soit f un endomorphisme de E. Si P_f est scindé sur K (c'est à dire P_f admet toutes ses racines dans K) et si de plus toutes ses racines sont simples, alors f est diagonalisable.*

La diagonalisation

Plus généralement, soit E un $K-$e.v. de dimension n et $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E. Soit f un endomorphisme de E possédant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

Donc les n vecteurs propres de f associés aux n valeurs propres distinctes forment une autre base de E et comme pour chacun de ces vecteurs u_i on a

$$f(u_i) = \lambda_i u_i,$$

alors la matrice associée à f dans cette base est

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & ... & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et si de plus P étant la matrice de passage de la première base à celle des vecteurs propres, alors on

$$D = P^{-1}AP.$$

Théorème 9.3 *Soit f un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E de dimension finie n, alors les propositions suivantes sont équivalentes*
1. f est diagonalisable (A est diagonalisable)
2. $P_A(\lambda)$ est scindé sur K et pour toute racine λ_i de multiplicité h_i, on a

$$\dim E_{\lambda_i} = h_i.$$

Exemple 9.10 *On reprend l'exemple précédent. On a trouvé $E_{\lambda_1} = \langle(1,0,-1)\rangle$ et $E_{\lambda_2} = \langle(2,1,0),(0,0,1)\rangle$ et donc*

$$\dim E_{\lambda_1} = 1 = \textit{ ordre de multiplcité de } \lambda_1$$

et

$$\begin{aligned} \dim E_{\lambda_1} &= 2 \textit{ (car la famille est } \{(2,1,0),(0,0,1)\} \textit{ libre} \\ &= \textit{ordre de multiplcité de } \lambda_2. \end{aligned}$$

En utilisant le théorème précédent, on a A est diagonalisable et elle est semblable à la matrice

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$D = P^{-1}AP$ avec $P = Pass(B_{can}, B_{vectpro})$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \textit{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice A_m, de coefficients réels suivante :

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$$

$m \in \mathbb{R}$.

1) Calculer, en fonction de m, les valeurs propres de A_m.

2) Dans le cas où $m = 1$, calculer les sous espaces propres associés. A_1 est-elle diagonalisable ?

3) Même question pour le cas $m = 2$, préciser s'il ya lieu, la matrice diagonale associée D_2 et la matrice P_2 telles que $D_2 = P_2^{-1} A_2 P_2$.

4) A_m est-elle diagonalisable dans le cas général : $m \neq 1$ et $m \neq 2$? Si oui, donner la matrice D_m.

Chapitre 10

Intégrales et calcul des primitives

10.1 Intégrale de Riemann

Dans la présentation de l'intégrale de Riemann, les fonctions en escalier jouent un rôle primordial. Nous commençons par donner leurs propriétés et nous définissons leur intégrale.

Fonctions en escalier

Définition 10.1 *On appelle **subdivision** de l'intervalle compact (i.e. fermé et borné) $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ un ensemble fini de points $x_0, x_1, ..., x_n$ tel que*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b.$$

*On remarque que $x_i - x_{i-1} > 0$, $\forall i = 1, ..., n$. On appelle **pas de la subdivision** le réel $\max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$.*

Définition 10.2 *Une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **en escalier** s'il existe une subdivision $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $[a, b]$ telle que f soit constante sur chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$, $i = 1, 2, ..., n$.*

Une fonction est dite en escalier sur $\mathbb{R}$ s'il existe un intervalle $[a, b]$ telle que f soit nulle en dehors de $[a, b]$ et en escalier sur$[a, b]$.

Exemple 10.1 *1. La fonction f définie sur $[0, 1]$ par*

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ \frac{1}{2} \text{ si } x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\\ 3 \text{ si } x = \frac{1}{2} \\ 1 \text{ si } x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

est une fonction en escalier sur $[0, 1]$.

2. La fonction constante sur $[a, b]$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$.

Propriétés des fonctions en escalier

Proposition 10.1 *Si f et g sont deux fonctions en escalier sur $[a, b]$, alors $f + g, \lambda f, f.g$ et $|f|$ sont en escalier sur $[a, b]$.*

Intégrale des fonctions en escalier

Définition 10.3 *Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$,*

$$f(x) = c_i, \ x \in]x_{i-1}, x_i[, i = 1, ..., n.$$

On appelle intégrale de f sur $[a, b]$ le nombre

$$\begin{aligned} I(f) &= c_1 (x_1 - x_0) + c_2 (x_2 - x_1) + ... + c_n (x_n - x_{n-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i (x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

On note ce nombre par $\int_a^b f(x) \, dx$.

Remarque 10.1 *1. Le nombre $I(f)$ ne dépend que de f et non de la subdivision.*

2. $I(f)$ ne dépend pas de x.

3. Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$ et $f \geq 0$ alors

$$\int_a^b f(x) \, dx = 0 \nRightarrow f = 0.$$

4. $\int_a^b f(x) \, dx$ ne dépend pas des valeurs prises par f aux points de la subdivisions.

Exemple 10.2 *1. Soit*

$$f: \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = c, \end{array}$$

alors $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,c$.

2. Considérons la fonction f *définie sur* $[0,1]$ *par*

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ \frac{1}{2} \text{ si } x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\\ 3 \text{ si } x = \frac{1}{2} \\ 1 \text{ si } x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$$

alors $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 0\right) + 1\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

Proposition 10.2 ***(Linéarité de l'intégrale)***

Soient f *et* g *deux fonctions en escalier sur* $[a,b]$ *et* λ *une constante réelle donnée. Alors, on a*

1) $\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$

2) $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

Proposition 10.3 ***(Croissance de l'intégrale)***

Soient f *et* g *deux fonctions en escalier sur* $[a,b]$. *Alors, on a*

1) $\forall x \in [a,b],\ f(x) \geq 0 \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

2) $\forall x \in [a,b],\ f(x) \geq g(x) \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$.

Preuve 52 *1) Si* $f(x) \geq 0$, *alors* $I(f)$ *est une somme de réels positifs, elle est donc positive.*

Remarquons que f *peut prendre des valeurs négatives aux points de la subdivision sans que le résultat soit changé car ces valeurs n'interviennent pas dans le calcul de* $I(f)$.

2) On a $\forall x \in [a,b]$

$$\begin{array}{rcl} f(x) \geq g(x) & \Longrightarrow & f(x) - g(x) \geq 0 \\ & \Longrightarrow & \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx \geq 0 \\ & \Longrightarrow & \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geq 0 \\ & \Longrightarrow & \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx. \end{array}$$

Convention

a) $\forall u \in [a,b],\ \int_u^u f(x)\,dx = 0$.

b) $\forall u, v \in [a,b] : u < v,\ \int_v^u f(x)\,dx = -\int_u^v f(x)\,dx$.

Proposition 10.4 *Soient* f *et* g *deux fonctions en escalier sur* $[a,b]$. *Alors, on a*

1. $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

2. $\int_a^b |f(x) + g(x)|\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx + \int_a^b |g(x)|\,dx$.

Preuve 53 *1. On a*

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad \forall x \in [a,b],$$

par suite

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

c'est à dire

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

2. On utilise l'inégalité triangulaire

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \quad \forall x \in [a,b]$$

et on aura

$$\begin{array}{rcl} \int_a^b |f(x) + g(x)|\,dx & \leq & \int_a^b [|f(x)| + |g(x)|]\,dx \\ & \leq & \int_a^b |f(x)|\,dx + \int_a^b |g(x)|\,dx. \end{array}$$

Proposition 10.5 ***(Additivité par rapport aux intervalles, relation de Chasles)***
Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$ et $c \in]a,b[$, on a alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Maintenant, on va étendre à d'autres fonctions la notion de l'intégrale qu'on vient de définir dans le cadre des fonctions en escalier tout en lui consevant ses propriétés.

Intégrale au sens de Riemann d'une fonction bornée sur $[a,b]$

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Considérons U_f (resp. V_f) : L'ensemble des fonctions en escalier qui minorent (resp. majorent) f.

$$u \in U_f \Longleftrightarrow \forall x \in [a,b], u(x) \leq f(x)$$

(resp.

$$v \in V_f \Longleftrightarrow \forall x \in [a,b], f(x) \leq v(x)\,).$$

On a U_f (resp. V_f) $\neq \emptyset$ car

$$u_0(x) = \inf_{t\in[a,b]} f(t) = m \in U_f$$

(resp.

$$v_0(x) = \sup_{t\in[a,b]} f(t) = M \in V_f)$$

Posons

$$A = \left\{ \int_a^b u(x)\,dx, u \in U_f \right\}$$

(resp.

$$B = \left\{ \int_a^b v(x)\,dx, v \in V_f \right\}),$$

alors, on a $A \neq \emptyset$ (resp. $B \neq \emptyset$) car $U_f \neq \emptyset$ (resp. $V_f \neq \emptyset$) et A est majoré (resp. B est minoré) par les élément de B (resp. de A). On appelle intégrale inférieure (resp. supérieure) de f sur $[a,b]$ et on note $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ (resp. $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$) le nombre $\sup A$ (resp. $\inf B$).

Remarque 10.2 $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Définition 10.4 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. f est dite intégrable au sens de Riemann si*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

et on note l'intégrale de f sur $[a,b]$ par $\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Exemple 10.3 *(Une fonction bornée, non intégrable)*
Considérons la fonction f définie sur $[0,1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1 \text{ si } x \in [0,1] - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Il est clair que f est bornée ($0 \leq f(x) \leq 1, \forall x \in [a,b]$). Posons

$$A = \left\{ \int_0^{1,} u(x)\,dx, u \in U_f \right\},$$

(resp.

$$B = \left\{ \int_0^{1,} v(x)\,dx, v \in V_f \right\}$$

$u \in U_f \Longrightarrow u \leq 0$ (resp. $v \in V_f \Longrightarrow v \geq 1$). Soit $u_0 = 0$ (resp. $v_0 = 1$) la fonction constante

$$\int_0^{1,} u(x)\,dx \leq \int_0^{1,} u_0(x)\,dx = 0$$

(resp.

$$\int_0^{1,} v(x)\,dx \leq \int_0^{1,} v_0(x)\,dx = 1).$$

Donc $\sup A = \int_0^{1,} u_0(x)\,dx = 0$ *(resp.* $\inf B = \int_0^{1,} v_0(x)\,dx = 1$*), c'est à dire* $\underline{\int_0^1} f(x)\,dx = 0$ *(resp.* $\overline{\int_0^1} f(x)\,dx = 1$*). Finalement, f n'est pas intégrable au sens de Riemann car*

$$0 = \underline{\int_0^1} f(x)\,dx \neq \overline{\int_0^1} f(x)\,dx = 1.$$

Attention

Ce n'est pas toutes les fonctions bornées qui sont intégrables, mais uniquement celles dont l'intégrale supérieure et inférieure sont égales.

Maintenant, on va donner d'autres définitions de l'intégrale de Riemann (pour les fonction bornées).

Sommes de Darboux

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ une subdivision de $[a,b]$. Posons

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\,, M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\,,\ i = 1,...,n$$

On appelle somme de Darboux inférieure (resp. supérieure) le nombre

$$\begin{aligned} s_n &= m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + ... + m_n(x_n - x_{n-1}) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

(resp.

$$\begin{aligned} S_n &= M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + ... + M_n(x_n - x_{n-1}) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})\,. \end{aligned}$$

On a

$$m(b-a) \le s_n \le S_n \le M(b-a)$$

et lorsque $\max_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1}) \to 0$, on a $s_n \to \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ et $S_n \to \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Définition 10.5 *Soit* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction bornée. f est intégrable sur* $[a,b]$ *si*

$$\sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \longrightarrow 0 \text{ lorsque } \max_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1}) \to 0.$$

Proposition 10.6 *1. Toute fonction continue sur* $[a,b]$ *est intégrable sur* $[a,b]$.

2. Toute fonction monotone sur $[a,b]$ *est intégrable sur* $[a,b]$.

Sommes de Riemann :

Soient $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et $\sigma = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ une subdivision de $[a,b]$. Soit λ_i un réel appartenant à $[x_{i-1}, x_i]$.

$$S = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i)(x_i - x_{i-1})$$

est appelée somme de Riemann de f relativement à σ. $s_n \le S \le S_n$.

Définition 10.6 *On dit que f est intégrable au sens de Riemann sur* $[a,b]$ *si S admet une limite lorsque* $p \to 0$*, avec* $p = \max_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1})$*. Cette limite s'appelle alors intégrale de f sur* $[a,b]$ *et on écrit*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{p\to 0} \sum_{i=1}^n f(\lambda_i)(x_i - x_{i-1})\,.$$

Application des sommes de Riemann

Soient f une fonction intégrable sur $[a,b]$ et $\sigma = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ la subdivision de $[a,b]$ dont le pas est constant et est égal à $\frac{b-a}{n}$, c'est à dire

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n}, i = 0,...,n.$$

Considérons $\lambda_i = x_i, i = 1,...,n$. On a

$$\begin{aligned} S &= \textstyle\sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n \dfrac{b-a}{n} f(x_i) \\ &= \dfrac{b-a}{n}[f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)]\,. \end{aligned}$$

Lorsque $n \to +\infty$, le pas de la subdivision $p = \dfrac{b-a}{n} \to 0.$ et $\lim_{n\to\infty} S = \int_a^b f(x)\,dx$, i.e.,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right).$$

Exemple 10.4 *Calculer* $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{n}{(n+k)^2}$. *On a*

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2} \\ &= \frac{1-0}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(0+k\frac{1-0}{n}\right), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{array}{rlll} f: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}. \end{array}$$

Donc

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} S_n &= \int_0^1 f(x)\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}dx \\ &= \left.\frac{-1}{1+x}\right|_0^1 \\ &= \frac{-1}{2}+1. \end{aligned}$$

Remarque 10.3 *Les propriétés qu'on a vu concernant l'intégrale des fonctions en escaliers s'étendent aux fonctions intégrables au sens de Riemann.*

10.2 Calcul des primitives

Nous avons vu dans le chapitre de dérivation le problème suivant : étant donnée une fonction F, trouver sa dérivée f c'est à dire la fonction $f(x)=F'(x)$. Dans ce chapitre, nous considérons le problème inverse : étant donnée une fonction f, trouver une fonction F telle que sa dérivée soit égale à f, c'est à dire $F'(x)=f(x)$.

Définition 10.7 *Soit* $f: I\longrightarrow\mathbb{R}$ *une fonction,* I *est un intervalle quelconque de* $\mathbb{R}$. *On appelle primitive de* f *toute fonction* $F: I\longrightarrow\mathbb{R}$ *dérivable telle que* $F'(x)=f(x), x\in I$.

Exemple 10.5 $x\longmapsto x^2$ *est la primitive de* $x\longmapsto 2x$. *La primitive de* $x\longmapsto\cos x$ *est* $x\longmapsto\sin x$

Remarque 10.4 *(non unicité de primitives)*
Soit $f(x)=2x+1$. *On a*

$$F(x)=x^2+x,\ G(x)=x^2+x+c\ (c \text{ est une constante})$$

sont deux primitives de f.

Théorème 10.1 *Si* F_1, F_2 *sont deux primitives de* f, *alors*

$$F_1-F_2=cste.$$

Conclusion : Si on connait une primitive F de f, toutes les autres primitives de f sont de la forme $F+c$.

Définition 10.8 *On appelle intégrale indéfinie de* f *et on note* $\int f(x)\,dx$, *toute expression de la forme* $F(x)+c$ *où* F *est la primitive de* f

$$\int f(x)\,dx=F(x)+c.$$

Remarque 10.5 *Retenons que les expressions* $\int_a^b f(x)\,dx$ *et* $\int f(x)\,dx$ *n'ont pas le même sens : l'une définit un nombre réel* $\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)$ *et l'autre une fonction de* x $\left(\int f(x)\,dx\right)$.

Propriétés fondamentales :

Soient, F et G deux primitives de f et g respectivement. Alors, $f+g, \lambda f$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$, $fG+Fg$, $\dfrac{fG-Fg}{G^2}$ avec $G\neq 0$ admettent des primitives. De plus

1. $\int (f+g)(x)\,dx=F(x)+G(x)$.
2. $\int (\lambda f)(x)\,dx=\lambda F(x)$.
3. $\int (fG+Fg)(x)\,dx=(F.G)(x)$.
4. $\int \left(\dfrac{fG-Fg}{G^2}\right)(x)\,dx=\left(\dfrac{F}{G}\right)(x)$.

Remarque 10.6 *Si* $\int f(x)\,dx = F(x)$, *alors*

a) $\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}F(ax) + c$

b) $\int f(x+b)\,dx = F(x+b) + c$

c) $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$

Intégrales immédiates

$\int f(x)\,dx$ représente la fonction qui a pour dérivée f.

$\int \sin x dx = -\cos x + c$

$\int \cos x dx = \sin x + c$

$\int x^m dx = \frac{1}{m+1}x^{m+1} + c$

$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c.$

Important :

Il ya une différence entre l'intégrale définie d'une fonction et sa primitive (il ne faut pas confondre les deux). En général, les fonctions en escalier n'admettent pas de primitives, tandis qu'elles sont intégrables au sens de Riemann.

Le lien existant entre l'intégrale définie et la primitive est donné par le résultat suivant

Proposition 10.7 *Si G est une primitive de la fonction continue f sur $[a,b]$, alors*

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(t)|_{t=a}^{t=b} = G(b) - G(a).$$

Cette proposition montre toute l'importance que représente la connaissance des primitives des fonctions continues dans le calcul des intégrales.

Remarque 10.7 $\int_a^b f'(x)\,dx = f(t)|_{t=a}^{t=b} = f(b) - f(a).$

Exemple 10.6 $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$

Techniques de calcul de primitives

a) Intégration par parties

Proposition 10.8 *Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 sur $[a,b]$. Alors*

$$\begin{array}{rcl} \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx & = & f(x)\,g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx \\ \int f(x)\,g'(x)\,dx & = & f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx. \end{array}$$

Preuve 54 *On a*

$$\begin{array}{l} (f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x) \\ \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = \int_a^b (f(x)\,g(x))'\,dx - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx \\ \Longrightarrow \int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx. \end{array}$$

Exemple 10.7 $I = \int x \sin x dx$. *Posons*

$$\begin{array}{rcl} f(x) = x & \Longrightarrow & f'(x) = 1 \\ g'(x) = \sin x & \Longrightarrow & g(x) = -\cos x. \end{array}$$

Donc

$$\begin{array}{rcl} \int x \sin x dx & = & -x\cos x + \int \cos x dx \\ & = & -x\cos x + \sin x + c. \end{array}$$

Remarque 10.8 *La méthode de l'intégration par parties s'emploie fréquemment dans le calcul des intégrales de la forme* $\int x^k \sin x dx$, $\int x^k \cos x dx$, $\int x^k e^{\alpha x} dx$, $\int x^k \ln x dx$

b) Intégration par changement de variable

Si le calcul de $\int f(x)\,dx$ s'avère difficile, on remplace x par $\varphi(t)$ dérivable et donc $dx = \varphi'(t)\,dt$ et on aura

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Exemple 10.8

$$\begin{array}{rcl} \int \sqrt{\sin x} \cos x \; dx & = & \int t^{\frac{1}{2}} dt, \quad t = \sin x,\ dt = \cos x dx \\ & = & \frac{1}{\frac{1}{2}+1} t^{\frac{1}{2}+1} + c \\ & = & \frac{2}{3} \sin^{\frac{3}{2}} x + c \\ & = & \frac{2}{3}\left(\sqrt{\sin x}\right)^3 + c. \end{array}$$

Remarque 10.9
$$\begin{aligned}\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx &= \int \frac{1}{t}dt, \quad t = g(x), \, dt = g'(x)\,dx \\ &= \ln|t| + c \\ &= \ln|g(x)| + c.\end{aligned}$$

Le succés de l'intégration dépend de notre habilité à choisir le changement de variable approprié qui simplifiera les calculs.

c) Intégration des fractions rationnelles

Dans le cas où f est un polynôme, on intégre terme à terme :
$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_1 x + a_0,$$
alors
$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int a_m x^m dx + \int a_{m-1}x^{m-1}dx + ... + \int a_1 x dx + \int a_0 dx \\ &= \tfrac{a_m}{m+1}x^{m+1} + \tfrac{a_{m-1}}{m}x^m + ... + \tfrac{a_1}{2}x^2 + a_0 x + c.\end{aligned}$$
Dans le cas d'une fraction rationnelles, il faut d'abord décomposer en éléments simples. Soit $f(x) = \dfrac{ax+b}{x^2+px+q}$, avec x^2+px+q possédant deux racines réelles α et β, donc
$$f(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}.$$
Par suite
$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int \tfrac{A}{x-\alpha}dx + \int \tfrac{B}{x-\beta}dx \\ &= A\ln|x-\alpha| + B\ln|x-\beta| + c.\end{aligned}$$

Exemple 10.9 *Calculer* $\int \dfrac{1}{x^2-1}dx$. *On a*
$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}.$$
Par suite
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-1}dx &= \int \tfrac{1}{2(x-1)}dx - \int \tfrac{1}{2(x+1)}dx \\ &= \tfrac{1}{2}\ln|x-1| - \tfrac{1}{2}\ln|x+1| + c.\end{aligned}$$

Si x^2+px+q n'a pas de racines réelles, écrivons
$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}.$$
En posant $\alpha = -\frac{p}{2}$ et $\beta^2 = q - \frac{p^2}{4}$, on obtient
$$x^2+px+q = (x-\alpha)^2 + \beta^2.$$
On fait maintenant le changement de variable $x-\alpha = \beta t$ et donc $dx = \beta dt$ et $(x-\alpha)^2+\beta^2 = \beta^2\left(t^2+1\right).$
$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int \frac{ax+b}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx \\ &= \int \frac{Mt+N}{t^2+1}dt \\ &= \int \frac{Mt}{t^2+1}dt + \int \frac{N}{t^2+1}dt \\ &= \tfrac{M}{2}\ln\left(t^2+1\right) + N\arctan t + c\end{aligned}$$
puis on remplace t par $\dfrac{x-\alpha}{\beta}$.

Exemple 10.10 *Calculer* $\int \dfrac{x+4}{x^2+2x+5}dx$. *On a*
$$x^2+2x+5 = (x+1)^2 + 4.$$
En posant $x+1 = 2t$ *(et donc* $dx = 2dt$*), on obtient*
$$\begin{aligned}\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}dx &= \int \frac{2t+3}{4(t^2+1)}2dt \\ &= \int \frac{4t}{4(t^2+1)}dt + \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^2+1}dt \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right) + \frac{3}{2}\arctan t + c \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2+2x+5}{4}\right) + \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + c.\end{aligned}$$

Intégration des fractions rationnelles en e^x
On utilise le changement de variable $t = e^x$ et donc $dt = e^x dx$ ou $dx = \frac{1}{t} dt$

Exemple 10.11 *Calculer* $\int \dfrac{dx}{1+e^x}$. *On a*

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1+e^x} &= \int \frac{dt}{t(1+t)} \\
&= \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{1+t} \\
&= \ln|t| - \ln|t+1| + c \\
&= \ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) + 1.
\end{aligned}$$

d) Intégration de certaines fonctions trigonométriques

i) Transformation en une intégrale de fonctions rationnelles

Soit une intégrale de la forme $\int f(\sin x, \cos x)\, dx$. En effectuant le changement da variable $t = \tan \frac{x}{2}$, les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ s'expriment alors sous formes de fonctions rationnelles. En effet,

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sin\left(\tfrac{x}{2} + \tfrac{x}{2}\right) = 2 \sin \tfrac{x}{2} \cos \tfrac{x}{2} \\
&= \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{1} = \frac{\dfrac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\dfrac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} \\
&= \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \\
&= \frac{2t}{1+t^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos x &= \cos\left(\tfrac{x}{2} + \tfrac{x}{2}\right) = \cos^2 \tfrac{x}{2} - \sin^2 \tfrac{x}{2} \\
&= \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{1} = \frac{\dfrac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\dfrac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} \\
&= \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \\
&= \frac{1-t^2}{1+t^2}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
t = \tan \tfrac{x}{2} &\iff \tfrac{x}{2} = \arctan t \\
&\implies x = 2 \arctan t \\
&\implies dx = \frac{2}{1+t^2} dt.
\end{aligned}$$

Exemple 10.12 *Calculer* $\int \dfrac{1}{\cos x} dx$. *On a*

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos x} dx &= \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \frac{2}{1+t^2} dt \\
&= \int \frac{2}{1-t^2} dt \\
&= \int \frac{1}{1+t} dt + \int \frac{1}{1-t} dt \\
&= \ln|1+t| - \ln|1-t| + c \\
&= \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + c \\
&= \ln\left|\frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}}\right| + c.
\end{aligned}$$

Remarque 10.10 *Le changement de variable* $t = \tan \frac{x}{2}$, *appelé changement de variable universel pour l'intégration des fonctions trigonométriques résout le problème d'intégration de toute expression de la forme* $f(\sin x, \cos x)$ *mais conduit fréquemment à des fonctions trop compliquées. Pour cette raison, il est parfois préférable d'utiliser d'autres changements de variables menant plus rapidement au but.*

ii) Intégrale de type $\int \cos^p x \sin^q x dx$ $(p, q \in \mathbb{N})$
Premier cas : p est impair
Soit $p = 2n+1$,

$$\begin{aligned} \int \cos^p x \sin^q x dx &= \int \cos^{2n+1} x \sin^q x dx \\ &= \int \left(1-\sin^2 x\right)^n \sin^q x \cos x dx. \end{aligned}$$

Le changement de variable $t = \sin x$ ramène le calcul de la dernière intégrale au calcul de $\int \left(1-t^2\right)^n t^q dt$, c'est à dire à la détermination de la primitive d'un polynôme.

Exemple 10.13 *Calculer $I = \int \cos^5 x \sin^2 x dx$. On a*

$$\begin{aligned} I &= \int \cos^4 x \sin^2 x \cos x dx \\ &= \int \left(1-\sin^2 x\right)^2 \sin^2 x \cos x dx \\ &= \int \left(1-t^2\right)^2 t^2 dt \\ &= \int \left(1+t^4-2t^2\right) t^2 dt \\ &= \int \left(t^2+t^6-2t^2\right) dt \\ &= \tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{1}{7}t^7 - \tfrac{2}{5}t^5 + c \\ &= \tfrac{1}{3}\sin^3 x + \tfrac{1}{7}\sin^7 x - \tfrac{2}{5}\sin^5 x + c. \end{aligned}$$

Deuxième cas : q est impair
Le changement de variable $t = \cos x$ permet de ramener le calcul de $\int \cos^p x \sin^q x dx$ à la recherche de la primitive d'un polynôme.
Troisième cas : Si p et q sont tous les deux pairs, le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$ ramène le calcul de $\int \cos^p x \sin^q x dx$ à la recherche de la primitive d'une fraction rationnelle.
iii) Intégrale de type $\int \cos mx \cos nx dx, \int \sin mx \cos nx dx, \int \sin mx \sin nx dx$
On peut les calculer en utilisant les formules suivantes

$$\begin{aligned} \cos mx \cos nx &= \tfrac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right] \\ \sin mx \cos nx &= \tfrac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right] \\ \sin mx \sin nx &= \tfrac{1}{2}\left[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right]. \end{aligned}$$

En effet

$$\begin{aligned} \int \cos mx \cos nx dx &= \tfrac{1}{2}\int \left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right] dx \\ &= \tfrac{1}{2(m+n)}\sin(m+n)x + \tfrac{1}{2(m-n)}\sin(m-n)x + c, \\ \int \sin mx \cos nx dx &= \tfrac{1}{2}\int \left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right] dx \\ &= \tfrac{-1}{2(m+n)}\cos(m+n)x - \tfrac{1}{2(m-n)}\cos(m-n)x + c. \end{aligned}$$

Exemple 10.14 *Calculer $\int \sin 3x \sin 2x dx$. On a*

$$\begin{aligned} \int \sin 3x \sin 2x dx &= \tfrac{1}{2}\int \left[-\cos 5x + \cos x\right] dx \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{-1}{5}\sin 5x + \sin x\right] + c \\ &= \tfrac{-1}{10}\sin 5x + \tfrac{1}{2}\sin x + c. \end{aligned}$$

e) Intégrales des fonctions contenant des radicaux :
Fonction de la forme $f\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)$ où f est soit un polynôme, soit une fraction rationnelle. On suppose que $ad - cb \neq 0$ et $\dfrac{ax+b}{cx+d} > 0$, dans ce cas le changement de variable adéquat est $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$; il permet de ramener le calcul de l'intégrale à celui de l'intégrale d'un polynôme ou d'une fraction rationnelle. Expliquons celà sur un exemple.

Exemple 10.15 *Calculer $I = \int \dfrac{1}{x+1}\sqrt{\dfrac{x+2}{x}} dx$.*
On pose $t = \sqrt{\dfrac{x+2}{x}}$, c'est à dire $t^2 = \dfrac{x+2}{x}$ et par suite $x = \dfrac{2}{t^2-1}$ et $dx = \dfrac{-4t}{\left(t^2-1\right)^2} dt$. D'où

$$I = \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - 2\arctan t + c,$$

puis on remplace t par $\sqrt{\dfrac{x+2}{x}}$.

f) Intégrale de la forme $\int P(x) e^{\alpha x} dx$ où P est un polynôme
$\int P(x) e^{\alpha x} dx$ peut se calculer par une intégration par parties. Mais on peut encore remarquer que

$$\int P(x) e^{\alpha x} dx = Q(x) e^{\alpha x}$$

où $Q(x)$ est un polynôme de même degré que $P(x)$ que l'on déterminera par identification.

Exemple 10.16 *Calculer* $I = \int \left(x^2 + x + 1\right) e^{-x} dx$*. On sait que* $I = \left(ax^2 + bx + c\right) e^{-x}$*, et on obtient* a, b, c *de la formule*

$$\left(x^2 + x + 1\right) e^{-x} = \left[\left(ax^2 + bx + c\right) e^{-x}\right]'.$$

On aura $a = -1, b = -3$ *et* $c = -4$*. Finalement,* $I = -\left(x^2 + 3x + 4\right) e^{-x}$*.*

Chapitre 11

Equations différentielles

On appelle "équation différentielle" toute équation dans laquelle figurent une fonction inconnue d'une variable et ses dérivées de différents ordres. $y'' + y' + 2y = 0$ est une équation différentielle d'ordre 2.

11.1 Généralités

Définition 11.1 *On appelle équation différentielle du premier ordre une relation de la forme*

$$F(x, y, y') = 0 \tag{11.1}$$

où y' est la dérivée de y par rapport à x et F une fonction numérique de 3 variables définie sur une partie U de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 11.1 *L'équation différentielle $y' - y^2 - x = 0$est du premier ordre avec $U = \mathbb{R}^3$ et $F(x, y, y') = y' - y^2 - x$.*

Définition 11.2 *Une équation différentielle du second ordre est une relation de la forme*

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{11.2}$$

où y' et y'' sont les dérivées du premier et du second ordres respectivement de y par rapport à x et F une fonction numérique de 4 variables définie sur une partie U de $\mathbb{R}^4$.

Exemple 11.2 *L'équation différentielle $y'' + xy + y^3 = 0$ est du second ordre avec $U = \mathbb{R}^4$ et $F(x, y, y', y'') = y'' + xy + y^3$.*

Définition 11.3 *Une équation différentielle du premier ordre (resp. du second ordre) est dite mise sous forme normale lorsqu'elle s'écrit*

$$y' = f(x, y) \ \ (resp. \ y'' = f(x, y, y')) \tag{11.3}$$

oú f représente une foncyion réelle de 2 (resp. 3) variables.

Définition 11.4 *Une solution (ou intégrale) de l'équation différentielle (11.1) (resp. (11.2)) est une fonction numérique u, définie sur un intervalle réel I, dérivable (resp. dérivable deux fois) et telle que $\forall x \in I$, on ait*

$$F(x, u(x), u'(x)) = 0 \quad (x, u(x), u'(x)) \in U$$

$$(resp. \quad F(x, u(x), u'(x), u''(x)) = 0 \quad (x, u(x), u'(x), u''(x)) \in U).$$

Exemple 11.3 *$y = \cos x$ est une solution définie dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.*

Définition 11.5 *Résoudre (ou intégrer) une équation différentielle, c'est en trouver toutes les solutions quand elles existent. Le graphe d'une solution est appelé courbe intégrale de l'équation différentielle.*

11.2 Equations différentielles du premier ordre

11.2.1 Equations différentielles à variables séparées

Une équation différentielle est dite à variables séparées (ou séparables) si elle est de la forme

$$g(y)\, y' = f(x) \tag{11.4}$$

où f et g sont deux fonctions réelles continues sur des intervalles I et J respectivement.

Résolution : On a

$$\begin{array}{rrcl} & g(y)\,y' & = & f(x) \\ \Longleftrightarrow & g(y)\,\dfrac{dy}{dx} & = & f(x) \\ \Longleftrightarrow & g(y)\,dy & = & f(x)dx \\ \Longrightarrow & \int g(y)\,dy & = & \int f(x)dx. \end{array}$$

On obtient

$$G(y(x)) = F(x) + C, \quad C \text{ est une constante}$$

où G est une primitive de g sur J et F est une primitive de f sur I. Enfin, on détermine $y : x \longmapsto y(x)$ comme solution de (11.4).

Exemple 11.4 *Considérons l'équation différentielle suivante*

$$y' = xy.$$

Remarquons que $y = 0$ est une solution triviale (évidente). On suppose que $y \neq 0$, donc $y'/y = x$ qui est à variables séparées avec $f(x) = x$ et $g(y) = 1/y$.

On a

$$\begin{array}{rlcl} & \frac{dy}{y} & = & xdx \\ \Longrightarrow & \ln|y| + K & = & \frac{1}{2}x^2 \\ \Longrightarrow & e^{\ln|y|+K} & = & e^{\frac{1}{2}x^2} \\ \Longrightarrow & e^K\,|y| & = & e^{\frac{1}{2}x^2} \\ \Longrightarrow & y & = & \pm\frac{1}{e^K}e^{\frac{1}{2}x^2} \\ \Longrightarrow & y & = & C'e^{\frac{1}{2}x^2}, C' \neq 0. \end{array}$$

Finalement, les solutions sont

$$y(x) = Ce^{\frac{1}{2}x^2}, C \in \mathbb{R}.$$

Elles sont définies sur $\mathbb{R}$.

11.2.2 Equations différentielles homogènes en x et y

C'est une équation de la forme

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad x \neq 0 \tag{11.5}$$

où $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Résolution : On utilise ce changement d'inconnue $z = y/x$ qui donne $y' = z + xz'$. Par suite

$$\begin{array}{rrcl} (11.5) \Longleftrightarrow & z + xz' & = & f(z) \\ \Longleftrightarrow & z + x\frac{dz}{dx} & = & f(z) \\ \Longleftrightarrow & xdz & = & (f(z) - z)\,dx \\ \Longrightarrow & \int \frac{dz}{f(z)-z} & = & \int \frac{dx}{x}. \end{array}$$

D'où

$$\begin{array}{rlcl} & \ln|x| & = & \phi(z) + K, \quad \phi \text{ est une primitive de } \frac{1}{f(z)-z} \\ \Longrightarrow & |x| & = & \exp\{\phi(z) + K\} \\ \Longrightarrow & x & = & \pm\exp\{\phi(z)\}.\exp\{K\}, \end{array}$$

puis, on détermine y solution de (11.5) grâce à la relation $y = xz$.

Exemple 11.5 *Résoudre $2xyy' = y^2 - x^2$.*

Elle est de la forme $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, avec $f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} - \frac{1}{\frac{y}{x}}\right)$. Le changement d'inconnue $= y/x$ conduit à l'équation $z + xz' = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$. En intégrant, on obtient $x = \frac{c}{1+z^2}$. D'où

$$y(x) = \pm c\sqrt{\left|\frac{c}{x} - 1\right|}, \text{ c est une constante.}$$

11.2.3 Equations différentielles linéaires du premier ordre

Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation différentielle de la forme

$$y' + a(x)\,y = f(x) \tag{11.6}$$

où f et a sont deux fonctions réelles définies sur un intervalle J. (11.6) est dite équation différentielle non homogène (ou avec second membre). l'équation différentielle

$$y' + a(x)\,y = 0 \tag{11.7}$$

est dite équation différentielle homogène (ou sans second membre). (11.7) est appelée l'équation homogène associée à l'équation (11.6).

a) Résolution de l'équation homogène (11.7) : Soit $y' + a(x)\,y = 0$. Si $y \neq 0$, on a

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx$$

et par suite

$$\ln|y| = -A(x) + C_1$$

où $C_1 \in \mathbb{R}$ et A est une primitive de a sur J. D'où

$$y(x) = C_2 \exp\{-A(x)\},\ C_2 = \pm\exp\{C_1\} \in \mathbb{R}^*.$$

Remarque : $y = 0$ est une solution triviale (évidente) de (11.7).
Finalement

$$y(x) = C\exp\{-A(x)\},\ C \in \mathbb{R}$$

est la solution générale de (11.7).

a) Résolution de l'équation avec second membre (11.6) : Si y_0 est la solution générale de (11.7) et y_1 est une solution particulière de (11.6), alors $y = y_0 + y_1$ est la solution générale de (11.6).

Méthode de la variation de la constante : Soit $y = C\exp\{-A(x)\}$ la solution générale de (11.7). On fait varier la constante C, et la solution générale de (11.6) sera : $y(x) = C(x)\exp\{-A(x)\}$. On a $y' = C'\exp\{-A(x)\} - Ca(x)\exp\{-A(x)\}$. En remplaçant y et y' dans (11.6), on obtient

$$C'(x)\exp\{-A(x)\} - Ca(x)\exp\{-A(x)\} + a(x)C(x)\exp\{-A(x)\} = f(x)$$

qui donne

$$C'(x) = f(x)\exp\{A(x)\},$$

par conséquent

$$C(x) = \int f(x)\exp\{A(x)\}dx.$$

Finalement la solution générale de (11.6) est

$$y(x) = \exp\{-A(x)\}\int f(x)\exp\{A(x)\}dx.$$

Exemple 11.6 *Résoudre l'équation différentielle*

$$y' - y = e^x \ldots\ldots\ldots\ (E)$$

L'équation homogène associée est

$$y' - y = 0 \ldots\ldots\ (E_0)$$

Pour $y \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} = 1 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{dy}{y} = dx \\ &\Longrightarrow \quad \ln|y| = x + K,\ K \in \mathbb{R} \\ &\Longrightarrow \quad y = C_1 e^x,\ C_1 \in \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$

$y = 0$ est une solution évidente de (E_0). Finalement, la solution générale de (E_0) est $y(x) = ce^x$, $c \in \mathbb{R}$. On fait varier la constante c et la solution générale de (E) sera $y(x) = c(x)\,e^x$.

On a $y' = C'e^x + Ce^x$. Par suite

$$\begin{aligned} y' - y = e^x \quad &\Longrightarrow \quad C'e^x + Ce^x - Ce^x = e^x \\ &\Longrightarrow \quad C'(x) = 1 \\ &\Longrightarrow \quad C(x) = x + K, \quad K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc la solution générale de (E) est $y(x) = x + K$, $K \in \mathbb{R}$.

11.2.4 Equation différentielle de Bernoulli

Soient f, g deux fonctions continues sur un intervalle I. Une équation de la forme

$$y' + f(x)\,y + g(x)\,y^\alpha = 0 \quad (\alpha \text{ réel},\ \alpha \neq 0, 1) \tag{11.8}$$

est dite de Bernoulli.

On écarte les cas $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ pour lesquels l'équation est linéaire. La fonction y sera supposée positive si α est non entier et de plus non nulle si α est négatif.

Pour chercher les solutions de l'équation différentielle de Bernoulli (éventuellement en écartant la solution triviale $y = 0$), on divise par y^{α} puis on fait le changement de la fonction inconnue $z = y^{1-\alpha}$. On aura

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} + \frac{f(x)}{y^{1-\alpha}} + g(x) = 0$$

et par conséquent

$$y'y^{-\alpha} + f(x)\, y^{1-\alpha} + g(x) = 0.$$

Cette dernière équation devient en z (du fait que $z' = (1-\alpha)\, y^{-\alpha} y'$)

$$\frac{z'}{1-\alpha} + f(x)\, z + g(x) = 0$$

qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Exemple 11.7 *Soit l'équation différentielle de Bernoulli :* $y' + xy + xy^4 = 0$. *Elle est de la forme (11.8) avec* $\alpha = 4$, $f(x) = g(x) = x$. *En posant* $z = y^{-3}$ *pour* $y \neq 0$, *on aura*

$$z' - 3xz = 3x \quad \ldots\ldots\ldots \ (E)$$

L'équation homogène associée à (E) *est*

$$z' - 3xz = 0 \ldots\ldots\ldots \ (E_0)\,.$$

Résolution de (E_0) :

$$\begin{array}{llll} (E_0) & \Longrightarrow & \frac{z'}{z} & = 3x \\ & \Longrightarrow & z & = Ce^{\frac{3}{2}x^2}. \end{array}$$

La méthode de la variation de la constante : $z(x) = C(x)\, e^{\frac{3}{2}x^2}$, *par suite* $z' = C'(x)\, e^{\frac{3}{2}x^2} + 3xC(x)e^{\frac{3}{2}x^2}$.

$$\begin{array}{llll} (E) & \Longleftrightarrow & C'(x)\, e^{\frac{3}{2}x^2} + 3xC(x)e^{\frac{3}{2}x^2} - 3xC(x)e^{\frac{3}{2}x^2} & = & 3x \\ & \Longrightarrow & C'(x) & = & 3xe^{\frac{-3}{2}x^2} \\ & & C(x) & = & -e^{\frac{-3}{2}x^2} + K. \end{array}$$

D'où $z(x) = \left(-e^{\frac{-3}{2}x^2} + K\right) e^{\frac{3}{2}x^2} = -1 + Ke^{\frac{3}{2}x^2}$, $K \in \mathbb{R}$.

Par conséquent $\frac{1}{y^3(x)} = -1 + Ke^{\frac{3}{2}x^2}$, $K \in \mathbb{R}$. *C'est à dire*

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{-1 + Ke^{\frac{3}{2}x^2}}}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

11.2.5 Equation de Riccati

Une équation différentielle du premier ordre est dite de Riccati si elle est de la forme

$$y' = f(x) + g(x)\, y + h(x)\, y^2, \tag{11.9}$$

les fonctions f, g, h sont continues dans un intervalle I. Ce type d'équations différentielles n'est pas toujours résoluble de façon élémentaire. Mais si une solution particulière y_1 pouvait être trouvée, on pourrait alors ramener la résolution de l'équation de Riccati à celle d'une équation différentielle linéaire. En effet, en posant $y = y_1 + z$, donc $y' = y_1' + z'$, on aura

$$\begin{array}{lll} y_1' + z' & = & f(x) + g(x)(y_1 + z) + h(x)(y_1 + z)^2 \\ & = & f(x) + g(x)\, y_1 + g(x)z + h(x)\, {y_1}^2 \\ & & +2h(x)y_1 z + h(x)\, z^2. \end{array}$$

Donc

$$z' = (2hy_1 + g)\, z + hz^2$$

qui est de type Bernoulli. Comme on l'a vu plus haut, en posant $v = \frac{1}{z}$, on est ramené à une équation linéaire. La solution générale est donnée par $y = y_1 + \frac{1}{v}$, où v est la solution générale de

$$v' + (g + 2hy_1)\, v + h = 0.$$

Exemple 11.8 *Soit l'équation différentielle de Riccati*

$$y' = 1 - x^3 + xy^2 \ \ldots\ldots\ldots \ (*)$$

Il est aisé de vérifier que $y_1 = x$ *est une solution particulière de* $(*)$.

La solution générale est donné par $y = x + \frac{1}{v}$, *où* v *est la solution générale de*

$$v' + 2x^2 v + x = 0.$$

Continuez ! ! Trouver v!!

11.3 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Soient a, $b \in \mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. L'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = f(x) \tag{11.10}$$

est dite équation différentielle du second ordre à coefficients constants avec second membre. On lui associe l'équation sans second membre

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{11.11}$$

Résolution de l'équation homogène (11.11) : L'équation

$$r^2 + ar + b = 0 \quad .... \; (C)$$

($r \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est dite équation caractéristique de l'équation différentielle (11.11). Il y'a trois cas à envisager

Premier cas : Si (C) admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors la solution générale de (11.11) est de la forme

$$y_0 = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

où C_1, C_2 sont deux constantes réelles.

Deuxième cas : Si (C) admet une racine réelle double r, alors la solution générale de (11.11) est de la forme

$$y_0 = (C_1 + C_2 x)\, e^{rx}$$

où C_1, C_2 sont deux constantes réelles.

Troisième cas : Si (C) admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \beta + i\omega$ et $r_2 = \beta - i\omega$, alors la solution générale de (11.11) est de la forme

$$y_0 = (C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x)\, e^{\beta x}$$

où C_1, C_2 sont deux constantes réelles.

Un exemple pour chaque cas

Exemple (1)

$$y'' + 2y' - 3y = 0 \quad ...... \; (1)$$

L'équation caractéristique

$$r^2 + 2r - 3 = 0$$

admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 1$ et $r_2 = -3$. Ainsi, la solution générale de (1) est

$$y_0 = C_1 e^{x} + C_2 e^{-3x}, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemple (2)

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \quad ...... \; (2)$$

L'équation caractéristique

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

admet la racine réelle double $r = 2$. Ainsi, la solution générale de (2) est

$$y_0 = (C_1 + C_2 x)\, e^{2x}, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemple (3)

$$y'' + 4y = 0 \quad ...... \; (3)$$

L'équation caractéristique

$$r^2 + 4 = 0$$

admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = 2i$ et $r_2 = -2i$. Ainsi, la solution générale de (3) est

$$\begin{aligned} y_0 &= (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)\, e^{0x} \\ &= C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Résolution de l'équation non homogène (11.10) :

La solution générale de (11.10) s'écrit sous la forme

$$y = y_0 + y_1$$

où y_0 est la solution générale de l'équation homogène (11.11) et y_1 est une solution particulière de l'équation avec second membre.

a) Le second membre est la somme de deux termes

Une solution particulière de

$$y'' + ay' + by = f_1(x) + f_2(x)$$

est la somme d'une solution particulière de l'équation

$$y'' + ay' + by = f_1(x)$$

et d'une solution particulière de l'équation

$$y'' + ay' + by = f_2(x).$$

b) Le second membre est un polynôme de degré n

Soit à résoudre

$$y'' + ay' + by = P_n(x)$$

où P_n est un polynôme de degré n. On cherche une solution particulière polynômiale. On distingue deux cas :

Premier cas : Si $b \neq 0$, on cherche y_1 sous la forme d'un polynôme de degré n.

Deuxième cas : Si $b = 0$ et $a \neq 0$,

$$y_1 = xQ_n(x)$$

avec Q_n un polynôme de degré n.

Exemple : Soit à résoudre

$$y'' + 2y' - 3y = x^3 + 2x + 1.$$

On a $y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Comme $b = -3 \neq 0$, on cherche une solution particulière sous la forme

$$y_1 = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3.$$

En identifiant, on obtient

$$a_0 = \frac{-1}{3}, a_1 = \frac{-2}{3}, a_2 = \frac{-20}{9} \text{ et } a_3 = \frac{-61}{27}.$$

La solution générale est

$$\begin{array}{rcl} y & = & C_1 e^x + C_2 e^{-3x} \\ & & -\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{20}{9}x - \frac{61}{27}. \end{array}$$

c) Le second membre est de la forme e^{mx} (m est une constante)

Dans la recherche d'une solution particulière y_1, il y a lieu de distinguer trois cas selon les valeurs de m.

Premier cas : m n'est pas une racine de l'équation caractéristique

On cherche alors une solution particulière sous la forme

$$y_1 = ke^{mx}.$$

Deuxième cas : m est une racine simple de l'équation caractéristique

On cherche alors une solution particulière sous la forme

$$y_1 = kxe^{mx}.$$

Troisième cas : m est une racine double de l'équation caractéristique

On cherche alors une solution particulière sous la forme

$$y_1 = kx^2 e^{mx}.$$

Exemple (1) : Soit à résoudre

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$$

On a $y_0 = (C_1 + C_2 x) e^{2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. On cherche y_1 sous la forme

$$y_1 = kx^2 e^{2x}$$

car 2 est une racine double de l'équation caractéristique. En identifiant, on trouve $k = \frac{1}{2}$, donc la solution générale est

$$\begin{array}{rcl} y_g & = & y_0 + y_1 \\ & = & \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{2}x^2\right) e^{2x}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Exemple (2) : Soit à résoudre

$$y'' - 5y' + 6y = 2e^{3x} + e^{4x}.$$

On a $y_g = y_0 + y_1 + y_2$, où y_0 est la solution générale de l'équation homogène

$$y'' - 5y' + 6y = 0,$$

y_1 est une solution particulière de
$$y'' - 5y' + 6y = 2e^{3x}$$
et y_2 est une solution particulière de
$$y'' - 5y' + 6y = e^{4x}.$$
On trouve
$$y_0 = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$
On cherche y_1 sous la forme $y_1 = k_1xe^{3x}$. En identifiant, on trouve $k_1 = 2$. On cherche y_2 sous la forme $y_2 = k_2e^{4x}$. En identifiant, on trouve $k_1 = \frac{1}{2}$. Finalement,
$$y_g = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + 2xe^{3x} + \frac{1}{2}e^{4x}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

d) Le second membre est de la forme $\sin mx$ (ou $\cos mx$, m est une constante)
Dans cette situation, il y a lieu de distinguer deux cas dans la recherche d'une solution particulière.
Premier cas : im n'est pas une racine de l'équation caractéristique
On cherche alors une solution particulière sous la forme
$$y_1 = k_1 \cos mx + k_2 \sin mx$$
et on détermine les constante k_1 et k_2 par identification.
Deuxième cas : im est une racine de l'équation caractéristique
On cherche alors une solution particulière sous la forme
$$y_1 = x\left(k_1 \cos mx + k_2 \sin mx\right)$$
et comme au cas précédent, on détermine les constante k_1 et k_2 par identification.
Exemple (1) : Soit à résoudre
$$y'' + 4y = \cos x$$
On a
$$y_0 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$
i n'est pas une racine de l'équation caractéristique, donc
$$y_1 = k_1 \cos x + k_2 \sin x.$$
On trouve $k_1 = \frac{1}{3}$, et $k_2 = 0$. Donc, $y_1 = \frac{1}{3}\cos x$. Finalement,
$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{3}\cos x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$
Exemple (2) : Soit à résoudre
$$y'' + 9y = \sin 3x$$
On a
$$y_0 = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$
$3i$ est une racine de l'équation caractéristique, donc
$$y_1 = x\left(k_1 \cos x + k_2 \sin x\right).$$
On trouve $k_1 = \frac{-1}{6}$, et $k_2 = 0$. Donc, $y_1 = \dfrac{-x\cos 3x}{6}$. Finalement,
$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - \frac{x\cos 3x}{6},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

e) Le second membre est de la forme $P_n(x)\,e^{mx}$ (où P_n est un polynôme de degré n, m est une constante)
Premier cas : m n'est pas une racine de l'équation caractéristique
On cherche alors une solution particulière sous la forme
$$y_1 = Q_n(x)\,e^{mx}$$
où Q_n est un polynôme de degré n
Deuxième cas : m est une racine de multiplicité k ($k = 1, 2$) de l'équation caractéristique
On cherche alors une solution particulière sous la forme
$$y_1 = x^kQ_n(x)\,e^{mx}$$

où Q_n est un polynôme de degré n.

Exemple : Soit à résoudre

$$y'' - 2y' + y = (x + 2) e^x.$$

On a $y_0 = (C_1 + C_2 x) e^x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. $m = 1$ est une racine double de l'équation caractéristique, donc $y_1 = x^2 P_1(x) e^x$ avec $P_1(x) = ax + b$. En identifiant, on trouve $a = \frac{1}{6}$ et $b = 1$. D'où

$$\begin{aligned} y_1 &= x^2 \left(\tfrac{1}{6}x + 1\right) e^x \\ &= \left(\tfrac{1}{6}x^3 + x^2\right) e^x. \end{aligned}$$

Finalement,

$$y = \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{6}x^3 + x^2\right) e^x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Chapitre 12

Fonctions de plusieurs variables

12.1 Topologie de $\mathbb{R}^n$

12.1.1 Norme sur un espace vectoriel

On appelle norme sur un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E toute application N, de E dans $\mathbb{R}$, qui vérifie :
$\forall x \in E \quad N(x) \geq 0$ et $N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;
$\forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$;
$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).
$N(x)$ est souvent notée $\|x\|$, qui rappelle l'analogie avec la valeur absolue dans $\mathbb{R}$ ou le module dans $\mathbb{C}$.
Propriété

$$\forall x \in E,\ \forall y \in E \quad |\|x\| - \|y\|| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$
Les trois normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$ définies pour $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ sont :
1) $\|X\|_\infty = \sup\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\}$;
2) $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$;
3) $\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

12.1.2 Parties remarquables de $\mathbb{R}^n$

Boules

Dans $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme, on appelle
- boule ouverte de centre $A \in \mathbb{R}^n$ et de $r > 0$, l'ensemble

$$B(A, r) = \{X \in \mathbb{R}^n; \|X - A\| < r\},$$

- boule fermée de centre $A \in \mathbb{R}^n$ et de $r > 0$, l'ensemble

$$B(A, r) = \{X \in \mathbb{R}^n; \|X - A\| \leq r\}.$$

Parties bornées

Une partie D de $\mathbb{R}^n$ est bornée si l'ensemble des réels $\|X - Y\|$, où X et Y sont des vecteurs quelconques de D, est borné.
D est bornée si, et seulement si, il existe une boule qui le contient.

12.2 Fonctions de plusieurs variables

Pour simplifier les énoncés seront donnés dans le cas de deux variables.

12.2.1 Généralités

Une fonction f, définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles, fait correspondre à tout vecteur $X = (x, y)$ de D un réel unique $f(X)$.
L'ensemble

$$S = \{(x, y, f(x, y)); (x, y) \in D\}$$

est la surface représentative de f, c'est l'analogue de la courbe représentative de f d'une fonction d'une variable.
Exemples

1) La fonction $f(x,y) = x^3 + xy + y^2 + 2$ est définie sur $\mathbb{R}^2$.
2) La fonction $g(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$ est définie à l'intérieur du cercle $x^2+y^2=1$.
Soit f une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $A = (a_1, a_2) \in D$. On appelle fonctions partielles associées à f au point A les fonctions

$$x_1 \longmapsto f(x_1, a_1) \text{ et } x_2 \longmapsto f(x_2, a_2)$$

définies sur un intervalles ouverts contenant respectivement a_1 et a_2.

12.2.2 Limites et continuité

Définissons la notion d'une limite d'une fonction $f(x,y)$ de deux variables. Supposons que la fonction est définie en tout point $M(x,y)$ suffisamment proche de $M_0(a,b)$.

Définition 12.1 *On dit que le nombre A est la limite de $f(x,y)$ lorsque $M(x,y)$ tend vers $M_0(a,b)$ et on écrit*

$$\lim_{x\to a, y\to b} f(x,y) = A \text{ ou } \lim_{M\to M_0} f(x,y) = A$$

si pour tout ϵ positif donné il existe un δ positif tel que

$$|A - f(x,y)| < \epsilon \text{ si } \|(x,y)-(a,b)\| < \delta.$$

Remarque 12.1 *L'existence et la valeur éventuelle de la limite sont indépendantes de la norme choisie dans $\mathbb{R}^2$. On dit que les normes de $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes. Lorsqu'elle existe, la limite est unique.*

Supposons que la fonction $f(x,y)$ est définie au point $M_0(a,b)$ et dans tous les points de $M_0(a,b)$.

Définition 12.2 *La fonction $f(x,y)$ est dite continue au point $M_0(a,b)$ si*

$$\lim_{x\to a, y\to b} f(x,y) = f(a,b) \text{ ou } \lim_{M\to M_0} f(x,y) = f(a,b).$$

Si f est continue en chaque point de D, on dit que f est continue sur D.
Si f est continue sur D, alors les fonctions partielles associées à f en un point sont continues sur D.

Opérations algébriques

Comme pour les fonctions d'une variable, la somme, le produit, le quotient (lorsque le dénominateur ne s'annule pas) de deux fonctions continues sont continus.

12.2.3 Dérivées partielles, différentiabilité

Soit $(x_0, y_0) \in D$. Les dérivées partielles de f en (x_0,y_0) sont les dérivées des fonctions partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h};$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0,y_0)}{k}.$$

On dit que f est de classe C^1 sur D si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur D.

Le gradient de f en (x_0,y_0) est le vecteur dont les composantes sont les dérivées partielles premières.

Définition 12.3 *Si les fonctions dérivées partielles admettent elles-mêmes des dérivées partielles en (x_0,y_0), ces dérivées sont appelées dérivées partielles secondes de f en (x_0,y_0). On les note*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0).
\end{aligned}$$

De façon analogue, on peut définir les dérivées partielles d'ordre supérieur à 2 par récurrence.
On dit que f est de classe C^k sur D si les dérivées partielles d'ordre k sont continues sur D.
On dit que f est de classe C^∞ sur D si les dérivées partielles de tous ordres existent et sont continues sur D.

Théorème 12.1 *Si* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *ou* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *est continue en* (x_0, y_0)*, alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Définition 12.4 *On dit que* f *est différentiable en* (x_0, y_0) *s'il existe des constantes réelles* A *et* B *telles que*

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + \|(h,k)\| \epsilon(h,k)$$

avec $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \epsilon(h,k) = 0$.

Dans ce cas, on a $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Théorème 12.2 *Si* f *est différentiable en* (x_0, y_0)*, alors* f *admet des dérivées partielles en* (x_0, y_0).
Si f *est de classe* C^1 *au voisinage de* (x_0, y_0)*, alors* f *est différentiable en* (x_0, y_0).
Les deux réciproques sont fausses.

12.3 Intégrales double et triple

Dans cette section, on donnera uniquement quelques éléments relatifs aux calculs d'intégrales double et triple.
Considérons l'ensemble

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, a \le x \le b; \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$$

où φ et ψ sont deux fonctions continues sur $[a,b]$. Alors,

$$\int\int_A f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

C'est le théorème de Fubini, qui définit l'intégrale double à l'aide de deux intégrales simples.
Si $f(x,y) = 1$, l'intégrale double $\int\int_A dxdy$ est l'aire de A.

Formule de changement de variables

Soit f une fonction continue sur un domaine D fermé et borné, en bijection avec un domaine fermé et borné Δ au moyen des fonctions de classe C^1 $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, alors

$$\int\int_D f(x,y)\,dxdy = \int\int_\Delta f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| dudv.$$

Le déterminant

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \psi}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix}$$

est appelé jacobien.

Cas des coordonnées polaires

$$\int\int_D f(x,y)\,dxdy = \int\int_\Delta f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho d\rho d\theta.$$

De façon analogue, on peut définir l'intégrale triple $I = \int\int\int_D f(x,y,z)\,dxdydz$ pour une fonction f continue sur un domaine fermé et borné D de $\mathbb{R}^3$ à l'aide d'intégrales simples successives.
Si $f(x,y) = 1$, l'intégrale triple $\int\int_D dxdydz$ est le volume de D.
On peut définir aussi (comme pour les intégrales doubles) les formules de changement de variables.

Cas des coordonnées cylindriques

$$I = \int\int\int_\Delta f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\,\rho d\rho d\theta dz.$$