Propriétés des fluides

1.1. Définition d'un fluide

On appelle fluide un corps qui n'a pas de forme propre et qui est facilement déformable. Les liquides et les gaz sont des fluides, ainsi que des corps plus complexes tels que les polymères ou les fluides alimentaires. Ils se déforment et s'écoulent facilement. Un fluide englobe principalement deux états physiques : l'état gazeux et l'état liquide.

1.2. Système d'unités

Les unités de mesure utilisées dans ce document sont celles du système international (SI). Les unités principales de ce système sont rassemblées dans le tableau suivant :

Tableau 1.1 : Principales unités dans le système international (SI)

Longueur	Masse	Temps	Pression	Force	Energie	Puissance
Mètre	Kilogramme	Seconde	Pascal	Newton	Joule	Watt
(m)	**(Kg)**	**(s)**	**(Pa)**	**(N)**	**(J)**	**(W)**
L	M	T	$ML^{-1}T^{-2}$	MLT^{-2}	ML^2T^{-2}	ML^2T^{-3}

1.3. Propriétés des fluides

Tous les fluides possèdent des caractéristiques permettant de décrire leurs conditions physiques dans un état donné. Parmi ces caractéristiques qu'on appelle propriétés des fluides on a :

1.3.1 Compressibilité
1.3.2 Masse volumique et densité
1.3.3 Poids volumique
1.3.4 Volume massique
1.3.5 Viscosité

1.3.1 <u>Compressibilité</u>

La compressibilité est le caractère de variation de volume de fluide avec une variation de pression (dp), le volume de fluide subit une diminution de volume (dV).

L'augmentation de pression entraine une diminution de volume.

Le coefficient de compressibilité est : $\beta = -\dfrac{dV/V}{dp} = -\dfrac{dV}{dpV}$ (Pa^{-1}), (m^2/N) (1.1)

β : coefficient de compressibilité (m^2/N)
V : volume de fluide (m^3)
dV : variation de volume (m^3)

dp : variation de pression (N/m^2)

1.3.2 Masse volumique et densité

a) *Masse volumique* : La masse volumique ρ d'un fluide est la masse de l'unité de volume de ce fluide. Elle s'exprime en kg/m^3

Les fluides sont caractérisés par leur masse volumique $\rho = \frac{masse}{Volume} = \frac{M}{V}$ (1.2)

M : masse du fluide (kg)
V : volume du fluide (m^3)
ρ : masse volumique (kg/m^3)

Fluides	mercure	eau de mer	eau pure	huile	essence	butane	air
ρ(kg/m^3)	13 600	1030	1000	900	700	2	1.293

b) Densité

La densité : elle mesure le rapport de la masse volumique du fluide rapportée à un corps de référence. C'est une grandeur sans unité définie par : $d = \frac{\rho}{\rho_{réf}}$ (1.3)

Le corps de référence dépend de l'état physique du corps

Eau : pour les solides et les liquides

Air : pour les gaz

Exemples : $d_{eau} = \frac{1000}{1000} = 1$ $d_{essence} = \frac{700}{1000} = 0.7$

Les liquides sont caractérisés par une masse volumique relativement importante ;

$$\rho_{\text{liquide}} \gg \rho_{\text{gaz}}$$

Pour les gaz, la masse volumique dépend de la température et de la pression.

1.3.3 Poids volumique (poids spécifique) : ϖ (N/m^3)

Il représente la force d'attraction exercée par la terre sur l'unité de volume, c'est-à-dire le poids de l'unité de volume.

$$\varpi = \frac{G}{V} = \frac{Mg}{V} = \frac{\rho \cancel{V} g}{\cancel{V}} \qquad \varpi = \rho g \qquad (\mathrm{N/m^3}) \qquad (1.4)$$

1.3.4 **Volume massique** (volume spécifique)

C'est le volume qu'occupe l'unité de masse d'une substance, c'est l'inverse de la masse volumique

$$v = \frac{V}{M} = \frac{\cancel{V}}{\rho \cancel{V}} = \frac{1}{\rho} \qquad (\mathrm{m^3/kg}) \qquad (1.5)$$

1.3.5 Viscosité

La viscosité d'un fluide est la propriété de résister aux efforts tangentiels qui tendent à faire déplacer les couches de fluide les unes par rapport aux autres. Lorsque le fluide se déplace en couches parallèles ; le facteur de proportionnalité est le coefficient de viscosité dynamique, (μ) et on écrit alors :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \qquad (1.6)$$

La viscosité cinématique, ν, est définie comme étant le rapport entre la viscosité dynamique et la masse volumique.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \qquad (1.7)$$

Dans le système SI, l'unité de la viscosité dynamique est le (Pa.s) ou (kg/ms) ou Pl
Pa.s : Pascal seconde
Pl : Poiseuille avec 1 Pa.s = 1 Pl =1kg /ms
Dans le système CGS l'unité est le Poise (Po) avec 1 Po = 10^{-1} Pl
Dans le système SI, l'unité de la viscosité cinématique, ν, est le (m^2/s) ; dans le système CGS l'unité est le stockes où 1 stokes = 1 cm^2/s = 10^{-4} m^2/s

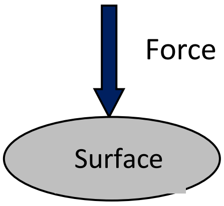
Statique des fluides

2.1. Introduction

La statique des fluides est la branche de la mécanique des fluides qui traite principalement les fluides au repos. L'étude des propriétés des fluides au repos constitue la statique des fluides.

2.2. Notions de pression

La pression exercée par une force F agissant perpendiculairement sur une surface S est :



(N/m²) (N) (m²)

$$\boxed{P = \frac{F}{S}} \qquad (2.1)$$

L'unité légale (SI) de pression est le Pascal. $1Pa = 1\,\frac{N}{m^2}$

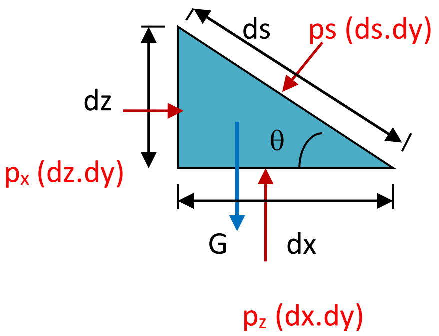
On utilise également l'hectopascal (hPa) $1hPa = 100$ Pa

Autres unités :

- le bar $1bar = 10^5$ Pa $= 10^5\,\frac{N}{m^2}$
- l'atmosphère 1atm = 101325 Pa = 1013 hPa appelée pression atmosphérique.

	Pascal (Pa)	Bar	Atmosphère
Pascal	1	10^{-5}	$9.869\ 10^{-6}$
Bar	10^5	1	0.987167
Kgf/cm²	98039	0.9803	0.968
Atmosphère	101325	1.0133	1
cm d'eau	98.04	$980\ 10^{-6}$	968 10-6
mm de Hg	133	$1.333\ 10_{-3}$	$1.316\ 10^{-3}$
mbar	10^2	10^{-3}	$987\ 10^{-6}$

2.3. Pression en un point d'un fluide au repos (Théorème de Pascal)



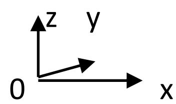


Figure (2.1) : Pression en un point d'un liquide au repos

Supposons que le liquide exerce une pression p_x sur la surface (dz dy), une pression p_z sur la surface (dx dy) et une certaine pression p_s sur la surface (ds dy) de l'élément.

Donc l'intensité des forces de pression (s'appliquant de façon normale aux surfaces) est :

$F_x = p_x\,(dzdy)$; $F_z = p_z\,(dxdy)$; $F_s = p_s\,(dsdy)$ (2.2)

La force de gravité agissant sur cet élément de fluide est : $G = \varpi \dfrac{(dxdz)}{2} dy$ (2.3)

Dans la direction horizontale des x :

$\sum \vec{F}_{ox} = 0 \longrightarrow F_x - F_s \sin\theta = 0 \longrightarrow p_x\,(dzdy) - p_s\,(dsdy)\sin\theta = 0$

D'où : $p_x\,dz - p_s\,ds\sin\theta = 0$, en sachant que $ds\sin\theta = dz$, on obtient : $p_x = p_s$ (2.4)

$\sum \vec{F}_{oz} = 0 \longrightarrow F_z - F_z\cos\theta - G = 0 \longrightarrow p_z\,(dxdy) - p_s\,(dsdy)\cos\theta - \varpi \dfrac{(dxdz)}{2} dy = 0$

D'où : $p_z dx - p_s ds \cos\theta - \varpi \dfrac{(dxdz)}{2} = 0$ et en sachant que $ds.\cos\theta = dx$, on obtient : $p_z - p_s - \dfrac{dz}{2} = 0$

Et si l'on réduit l'élément de volume à un point,
c'est-à-dire $dz = 0$, on obtient $p_z = p_s$ (2.5)
Des équations (2.4) et (2.5), on obtient : $p_x = p_z = p_s$ (2.6)

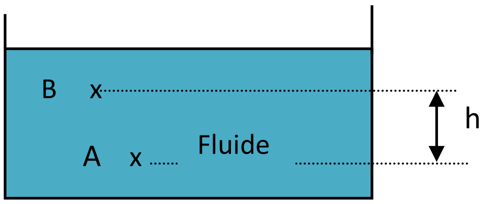
Par conséquent, la pression hydrostatique en un point donné d'un fluide au repos est la même (agit de façon égale) dans toutes les directions

On peut vérifier que la pression exercée au sein d'un liquide en équilibre,

- est constante en tous points d'un même plan horizontal.
- est indépendante de la direction considérée.
- croît au fur et à mesure que l'on s'éloigne de sa surface libre.

2.4. Principe fondamental de l'hydrostatique

3.1 <u>Principe fondamental de l'hydrostatique</u>



La différence de pression entre deux points d'un fluide en équilibre est donnée par la relation,

$$\boxed{p_A - p_B = \rho g h}$$

Figure 2.2

ρ est la masse volumique du fluide en (kg/m^3)
h est la dénivellation entre les deux points A et B en (m)
g est l'accélération de la pesanteur (9,81 N/kg)
$\Delta P = P_A - P_B$ est la différence de pression en (Pa)

2.5. Transmission des pressions dans les liquides

2.5.1. Théorème de Pascal

Toute variation de pression en un point d'un liquide au repos est transmise intégralement à tous les autres points du liquide.

2.5.2. Application : Principe de la presse hydraulique

Soit le schéma de principe d'une presse hydraulique (Fig.2.3). On y produit une force considérable à partir d'une force relativement peu importante, en considérant la surface d'un piston à la sortie 2 plus large que celui à l'entrée 1.

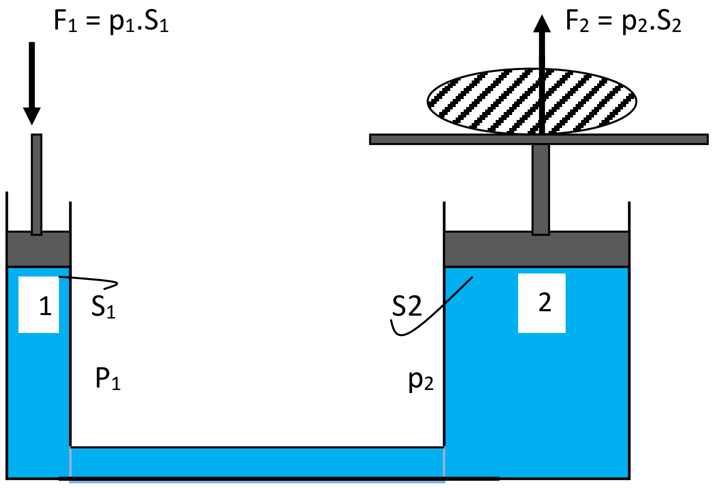


Figure.2.3 : Principe d'une presse hydraulique

Lorsque les deux pistons 1 et 2 sont sur le même niveau, on a : $p_1=p_2$

Soit : $F_1=p_1.S_1$ et $F_2=p_2.S_2$ donc : $P_1=\frac{F_1}{S_1}$ $P_2=\frac{F_2}{S_2}$

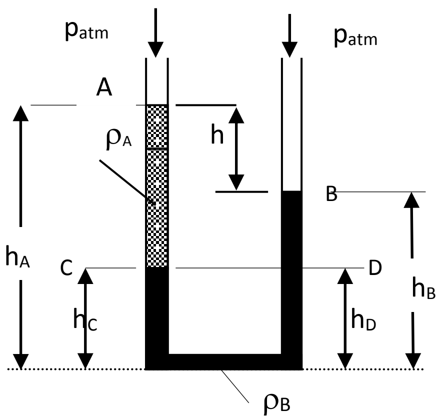
$p_1 = p_2$ donc : $\frac{F_1}{S_1}=\frac{F_2}{S_2}$

d'où : $\frac{F_2}{F_1}=\frac{S_2}{S_1}$

Si $S_2 \gg S_1 \Longrightarrow F_2 \gg F_1$

2.5.3. Equilibre de deux fluides non miscibles

Un tube en U rempli d'un liquide de masse volumique (ρ_B), si dans l'une des branches un autre liquide non miscible au premier et de masse volumique (ρ_A) est versé, il est observé une dénivellation $h=(h_A-h_B)$ entre les deux liquides. Les deux surfaces libres étant à la pression atmosphérique. D'après le principe de Pascal, il est possible d'écrire les équations suivantes :



$$\left.\begin{aligned} p_D &= p_{atm} + \rho_B\, g\,(h_B-h_D) \\ p_C &= p_{atm} + \rho_A\, g\,(h_A-h_C) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \cancel{p_{atm}} + \rho_B\, g\,(h_B-h_D) = \cancel{p_{atm}} + \rho_A\, g\,(h_A-h_C)$$

et puisque $h_D = h_C$ (même plan horizontal d'un même fluide) $\Longrightarrow$ $\rho_B\, g\,(h_B-h_C) = \rho_A\, g\,(h_A-h_C)$

$$\boxed{\rho_A = \rho_B \frac{(h_B - h_C)}{(h_A - h_C)}} \qquad (2.7)$$

La simple mesure des hauteurs des deux fluides permet de déterminer la masse volumique d'un fluide. De même ce concept est utilisé pour la masure des pressions avec les manomètres à colonne de liquide ou manomètre différentiel.

2.6. Principe d'Archimède

Si l'on examine le comportement d'un cylindre de longueur L et de section S, immergé dans un fluide de masse volumique ρ dans le champ de pesanteur terrestre, ce cylindre est soumis à plusieurs forces :

- des forces radiales de pression qui s'exercent sur la paroi verticale et qui sont diamétralement opposées et s'annulent deux à deux (f et f')

- sur la surface inférieure s'exerce une force verticale normale à S, dirigée vers le haut et d'intensité $F_2 = p_2.S$.
- sur la surface supérieure s'exerce une force verticale normale à S dirigée vers le bas et d'intensité $F_1 = p_1.S$

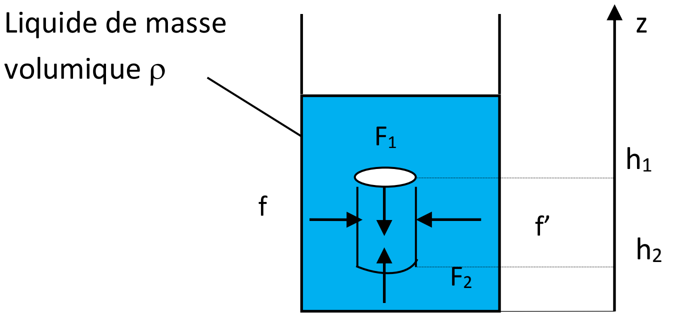


Figure 2.4 : Poussée d'Archimède cylindre immergé

La poussée d'Archimède est la résultante de toutes ces forces. Si ces forces sont projetées sur l'axe Oz, la résultante suivante est obtenue :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_2 + \vec{F}_1 = (p_2 - p_1).S = (h_2 - h_1)\ \rho\ g\ S = \rho V\ g$$

Puisque (h_2-h_1) n'est autre que la hauteur du cylindre. Donc : $\boxed{\sum \vec{F} = \rho V g}$ (2.8)

La poussée d'Archimède est dirigée dans le sens inverse du champ de pesanteur et s'annonce de la façon suivante : « Tout corps totalement immergé dans un liquide est soumis à une poussée dirigée du bas vers le haut et égale au poids du liquide déplacé, c'est-à-dire correspondant au volume du corps immergé »

Le comportement d'un corps immergé dans un fluide au repos ; soumis seulement aux forces de pression et de pesanteur, est donné par le sens du vecteur poids apparent, défini par la relation, en projetons sur l'axe Oh ; on obtient : $F_{app} = -m\ g + F_A$ dans laquelle F_{app}, mg et F_A représentent respectivement le poids apparent, le poids réel et la poussée d'Archimède. Dans la pratique, trois cas peuvent se présenter, si :

- $F_A > 0$, le corps s'élève dans le fluide et cette ascension aboutit à une flottaison du solide.
- $F_A = 0$, le corps est immobile dans le fluide, puisque la poussée d'Archimède équilibre le poids du solide.
- $F_A < 0$, le corps s'enfonce dans le fluide, c'est le type de chute qui est rencontrée dans la décantation des solides.

2.7. Equations de l'hydrostatique

Considérons un réservoir plein de liquide accéléré en bloc dans une direction quelconque dont la surface libre est exposée à la pression atmosphérique, et prenons un élément de fluide de volume (dxdydz). L'élément de fluide est en équilibre statique sous l'influence de trois forces de volume et de six forces de pression hydrostatique. Les forces qui agissent sur cet élément de volume (dxdydz) dans la direction z sont :

1. Les forces de volume : ρZ (dxdydz)
2. Les forces de surface (de pression) : $(p - \frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{2})$ dxdy et $(p + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{2})$ dxdy

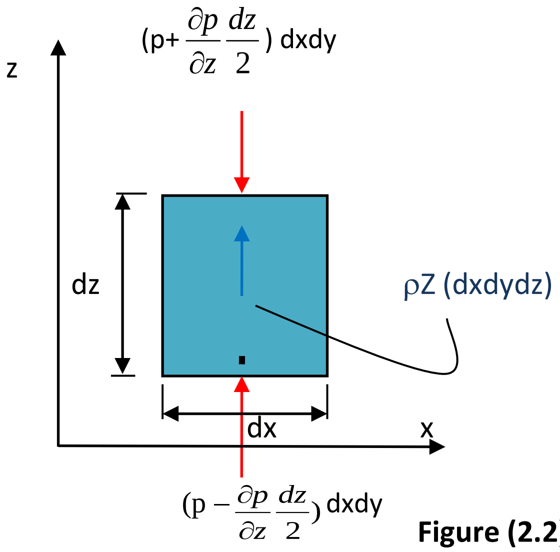


Figure (2.2) : Forces agissant sur un élément de fluide de volume (dxdydz) dans la direction z

La condition d'équilibre des forces selon z est : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$

$$(\cancel{p}-\frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{2})\,\cancel{dxdy}-(\cancel{p}+\frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{2})\,\cancel{dxdy}+\rho Z(\cancel{dxdydz})=0 \qquad \text{d'où : } -\frac{\partial p}{\partial z}+\rho Z=0 \qquad (2.9)$$

De la même façon, on obtient les équations d'équilibre dans les autres directions x et y :

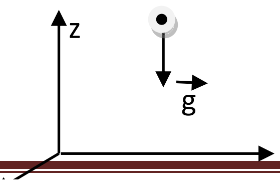
$$\begin{cases} \rho X-\dfrac{\partial p}{\partial x}=0 \\ \rho Y-\dfrac{\partial p}{\partial y}=0 \\ \rho Z-\dfrac{\partial p}{\partial z}=0 \end{cases} \qquad \boxed{\underbrace{\rho\vec{F}}_{1}-\underbrace{\overrightarrow{grad}\,p}_{2}=\vec{0}} \qquad (2.10)$$

1. Force de volume par volume unitaire 2. Force de pression par volume unitaire

Les équations (2.6) sont appelées équations fondamentales de l'hydrostatique (équations d'Euler). Ces équations montrent que la pression hydrostatique en un point donné d'un fluide au repos dépend des coordonnées du point dans le volume du liquide et de la masse volumique, c'est-à-dire p = f(x, y, z, ρ).

2.8. Hydrostatique d'un liquide incompressible dans le champ de pesanteur

Dans le cas où la force massique est seulement la force de pesanteur, les composantes de la force massique unitaire sont :



X=0 Y=0 Z= – g

y x

$$\rho g - \frac{dp}{dz} = 0\ ; \quad dp = -\rho g\, dz$$

d'où $\boxed{p(z) = -\rho g z + C}$ (2.11)

2.9. Hydrostatique dans d'autres champs de force

Dans certains cas particuliers, d'autres champs sont à prendre en considération. Les équations fondamentales générales de l'hydrodynamique sont valables s'il n'ya as de mouvement relatif entre les particules de fluide, elles sont aussi valables si le fluide est accéléré en bloc comme un corps solide.

On s'intéresse aux deux cas suivants :

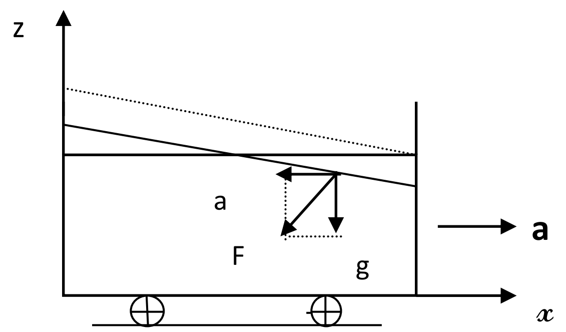
1. Cas d'un liquide soumis à l'action de la pesanteur avec accélération constante
2. Cas d'un liquide soumis à l'action de la pesanteur avec rotation uniforme

2.9.1. Champ de pesanteur avec accélération horizontale constante

Soit un liquide homogène soumis à une accélération horizontale constante **a**, donc :

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$ ainsi les équations (2.6) deviennent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = -\rho a \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \end{cases} \qquad \mathbf{(2.8)}$$



La pression est fonction uniquement de x et de z

La variation totale de la pression est définie comme suit :

p(x, y) = -ρa x +f (z)

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g = f'(z) \qquad f(z) = -\rho g z + C$$

D'où la pression est :

$$\boxed{p(x, z) = -\rho a x - \rho g z + C} \qquad (2.12)$$

On divise les deux termes de l'équation (2.9) par ($\overline{\omega}$ = ρg), on obtient :

$$\frac{p}{\omega} + z + \frac{a}{g}x = C \tag{2.13}$$

C'est l'équation fondamentale de l'hydrostatique dans le champ de pesanteur avec accélération horizontale constante.

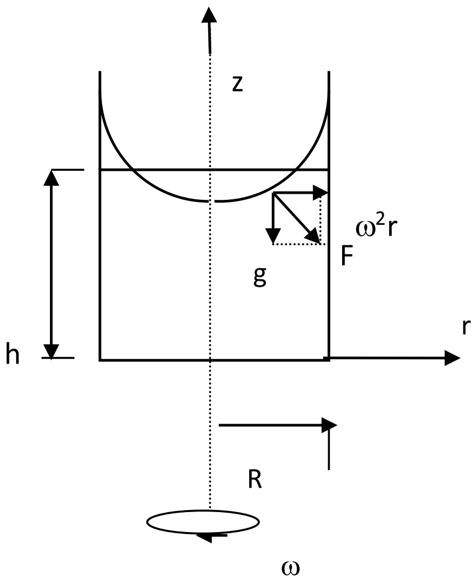
Les lignes isobares (lignes d'égale pression) sont des lignes dont tous les points sont soumis à la même pression, p= Cte et dp = 0. Donc l'équation (2.10) peut se mettre sous la forme :

$$\boxed{z = -\frac{a}{g}x + C} \tag{2.14}$$

C'est l'équation générale des lignes d'égales pression qui sont des droites de (-a/g) orthogonales au vecteur $\vec{F}$.

2.9.2. Champ de pesanteur avec rotation uniforme

Considérons un réservoir cylindrique qui tourne à une vitesse angulaire ω constante.



$$\vec{F} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^2 r \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\omega^2 r && \text{(a)} \\ &\frac{\partial p}{\partial y} = 0 && \text{(b)} \\ &\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g && \text{(c)} \end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

$$p(r,z) = \frac{\rho r^2 \omega^2}{2} + f(z)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad = \quad f'(z) \quad \text{d'où} \quad f(z) = -\rho g z + C$$

$$\boxed{p(r,z) = \frac{\rho r^2 \omega^2}{2} - \rho g z + C} \tag{2.16}$$

On divise les deux termes de l'équation (2.13) par ($\overline{\omega} = \rho g$), on obtient :

$$\frac{p}{\overline{\omega}} + z - \frac{\omega^2}{2g} r^2 = C \qquad (2.17)$$

C'est l'équation fondamentale de l'hydrostatique dans le champ de pesanteur avec rotation uniforme

Les lignes isobares (lignes d'égale pression) sont des lignes dont tous les points sont soumis à la même pression, p= Cte et dp = 0. Donc l'équation (2.14) peut se mettre sous la forme :

$$z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + C \qquad (2.18)$$

C'est l'équation générale des lignes d'égale pression qui sont des paraboles de révolution symétriques par rapport à l'axe de rotation, orthogonales au vecteur $\vec{F}$.

2.10. Applications:

Exercice 1 : Une brique de dimension (20x10x5) cm pèse 2.5 kg. Quelle pression exerce-t-elle sur le sol suivant la face sur laquelle on la pose ?

Solution

Face 1 : $p_1 = \frac{F}{S_1} = \frac{mg}{S_1} = \frac{2.5*9.81}{0.2*0.1} = 1226.25 \ \frac{N}{m^2}$

Face 2 : $p_2 = \frac{F}{S_2} = \frac{mg}{S_2} = \frac{2.5*9.81}{0.2*0.05} = 2425.50 \ \frac{N}{m^2}$

Face 3 : $p_3 = \frac{F}{S_3} = \frac{mg}{S_3} = \frac{2.5*9.81}{0.1*0.05} = 4905.00 \ \frac{N}{m^2}$

Dynamique des fluides parfaits incompressibles

3.1. Introduction

La dynamique étudie les fluides en mouvement pour simplifier le problème, on néglige les frottements. Dans un liquide non visqueux ou parfait en mouvement, la pression a les mêmes propriétés que dans un liquide au repos.

On s'intéresse dans ce chapitre aux équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides parfaits incompressibles à savoir :

L'équation de continuité (conservation de la masse)

Le théorème de Bernoulli (conservation de l'énergie)

Le théorème d'Euler (Conservation de la quantité de mouvement)

3.2. Equations générales de la dynamique des fluides parfaits

Soit un cylindre élémentaire de fluide parfait qui se déplace. La démonstration se fait dans la direction des z ; pour les autres directions x et y elle se fait de façon analogue.

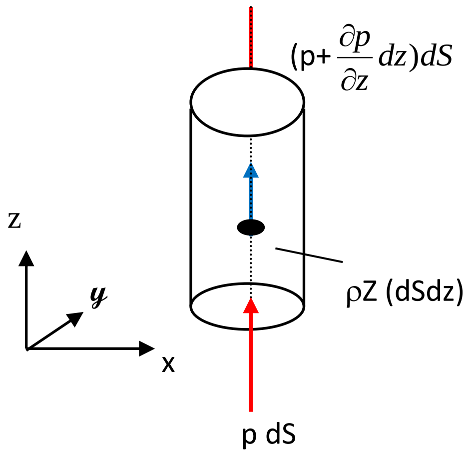


Figure (1.1) : Forces agissant sur un élément de volume (dSdz) dans la direction z

Les forces qui agissent sur cet élément de volume (dSdz) sont :

1. La force de volume : ρZ (dSdz)
2. Les forces de pression : pdS et $(p+\frac{\partial p}{\partial z}dz)dS$
3. La force d'inertie (accélération) : $\rho\,\frac{dw}{dt}(dSdz)$

où w est la composante de la vitesse $\vec{V}$(u, v, w) selon la direction z

Etant donné que la masse volumique reste constante, l'ensemble des forces satisfait à l'équation de Newton : $\sum \overrightarrow{F_{ext}}$ = masse x accélération

La condition d'équilibre des forces selon la direction des z s'écrit :

$$\cancel{p}dS - (\cancel{p}+\frac{\partial p}{\partial z}dz)\cancel{dS} + \rho Z\,(d\cancel{S}dz) = \rho\,\frac{dw}{dt}(d\cancel{S}dz)$$

ou par unité de volume : $-\dfrac{\partial p}{\partial z}+\rho Z=\rho\dfrac{dw}{dt}$

On peut écrire de manière identique la condition d'équilibre des forces dans les autres directions, puis sous sa forme vectorielle.

$$\left\{\begin{array}{l} \rho X - \dfrac{\partial p}{\partial x} = \rho\dfrac{du}{dt} \\[2ex] \rho Y - \dfrac{\partial p}{\partial y} = \rho\dfrac{dv}{dt} \\[2ex] \rho Z - \dfrac{\partial p}{\partial z} = \rho\dfrac{dw}{dt} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} X - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{du}{dt} \\[2ex] Y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{dv}{dt} \\[2ex] Z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = \dfrac{dw}{dt} \end{array}\right. \Longrightarrow \boxed{\underbrace{\rho\vec{F}}_{1} - \underbrace{\overrightarrow{\text{grad}}\,p}_{2} = \underbrace{\rho\frac{d\vec{V}}{dt}}_{3}} \qquad (3.1)$$

1. Force de volume par volume unitaire
2. Force de pression par volume unitaire
3. Force d'inertie par volume unitaire

$\vec{F}$ est le vecteur de force de volume par unité de masse dont les trois composantes sont (X, Y, Z).
Les équations (3.1) sont appelées équations générales de la dynamique des fluides parfaits ou **équations d'Euler**

En introduisant les expressions des composantes de l'accélération pour un écoulement tridimensionnel, les équations (3.1) s'écrivent sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} X - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} \\[2ex] Y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z} \\[2ex] Z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = \dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} \end{array}\right. \qquad (3.2)$$

3.3. Ecoulement permanent ou stationnaire

Un écoulement est dit permanent ou stationnaire lorsqu'en chaque point de l'espace, le vecteur vitesse $\vec{V}$ varie indépendamment du temps.

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$$

Dans le cas contraire, l'écoulement est dit non-permanent ou in stationnaire.

3.4. Equation de continuité

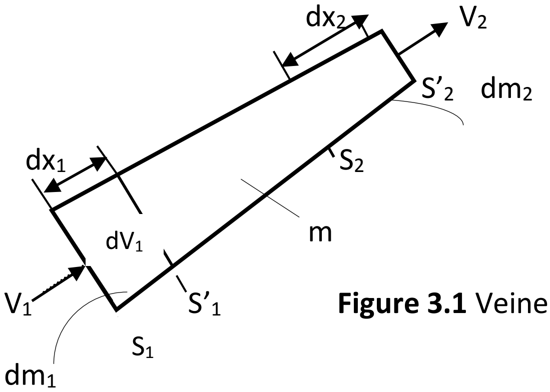


Figure 3.1 Veine de fluide parfait incompressible

Considérons une veine de fluide incompressible de masse volumique ρ animé d'un écoulement permanent (Fig.3.1). On désigne par :

S_1 et S_2 respectivement les sections d'entrée et la section de sortie du fluide à l'instant t
S'_1 et S'_2 respectivement les sections d'entrée et la section de sortie du fluide à l'instant t' (t+dt)
V_1 et V_2 les vecteurs vitesses d'écoulement respectivement à travers les sections S_1 et S_2 de la veine
dx_1 et dx_2 respectivement les déplacements des sections S_1 et S_2 pendant l'intervalle de temps dt
dm_1 : masse élémentaire entrante comprise entre les sections S_1 et S'_1
dm_2 : masse élémentaire sortante comprise entre les sections S_2 et S'_2
m : masse comprise entre S_1 et S_2
dV_1 : volume élémentaire entrant compris entre les sections S_1 et S'_1
dV_2 : volume élémentaire sortant compris entre les sections S_2 et S'_2
A l'instant t : le fluide compris entre S_1 et S_2 a une masse égale à (dm_1+m)
A l'instant t' : le fluide compris entre S'_1 et S'_2 a une masse égale à $(m+dm_2)$

La masse déplacée étant conservée, on écrit alors : $dm_1+m = m+dm_2$; soit $dm_1 = dm_2$

Alors : $\rho_1 dV_1 = \rho_2\, dV_2$ ou encore : $\rho_1\, S_1\, dx_1 = \rho_2\, S_2\, dx_2$

En divisant par dt, on obtient :

$$\rho_1 S_1 \overbrace{\frac{dx_1}{dt}}^{V_1} = \rho_2 S_2 \overbrace{\frac{dx_2}{dt}}^{V_2} \Longrightarrow \rho_1 S_1 V_1 = \rho_2 S_2 V_2$$

Puisque le fluide est considéré comme incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$; on obtient l'équation de continuité suivante :

$$S_1V_1 = S_2V_2 \tag{3.3}$$

Cette relation représente le débit volumique Q exprimé en (m^3/s). L'équation de continuité représente la loi de conservation de masse.

3.5. Notion de débit

3.5.1. Débit massique

Le débit massique d'une veine fluide est la limite du rapport dm /dt quand dt tend vers zéro

$$q_m = \frac{dm}{dt}$$

Où :

q_m : masse de fluide par unité de temps traversant une section droite de la veine [kg/s]

dm : masse élémentaire en (kg) qui traverse la section pendant un intervalle de temps dt

dt : intervalle de temps en (s)

En tenant compte des équations précédentes, on obtient :

$$q_m = \rho.S.\mathrm{V}$$

Ou encore :

$$q_m = \rho.S_1.\mathrm{V}_1 = \rho.S_2.\mathrm{V}_2 \tag{3.4}$$

Compte tenu de la conservation de masse, on peut généraliser l'équation (3.4)

$$q_m = \rho.S.\mathrm{V} \tag{3.5}$$

q_m : Débit massique (kg/s)
ρ: masse volumique (Kg/m^3)
S : section de la veine fluide (m^2)
V : vitesse moyenne du fluide à travers la section S (m/s)

3.5.2. Débit volumique

Le débit volumique d'une veine fluide est la limite du rapport **dV /dt** quand dt tend vers zéro

$$q_v = \frac{dV}{dt}$$

Où :

q_v : volume de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite (m^3/s)

dV : volume élémentaire en (m^3) traversant une section S pendant un intervalle de temps dt

dt : intervalle de temps en secondes (s)

Relation entre le débit massique q_m et le débit volumique q_v :

$$q_v = \frac{q_m}{\rho} = \frac{\cancel{\rho}.S.V}{\cancel{\rho}} = S.V$$

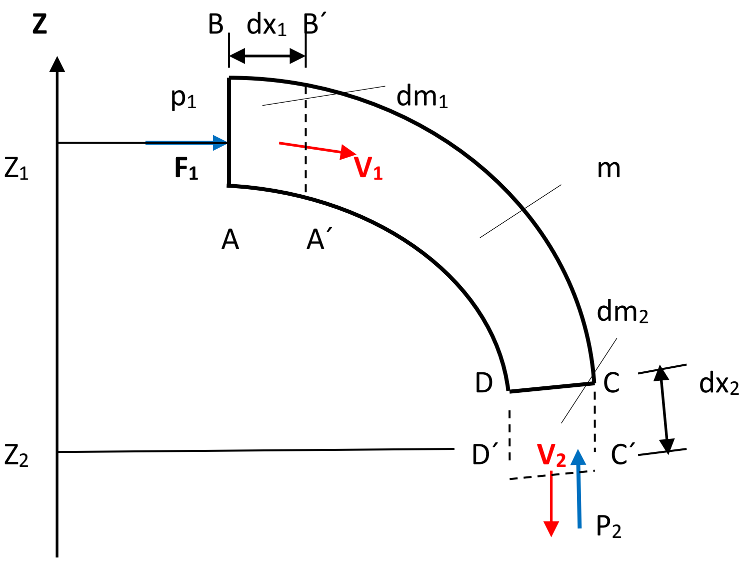
3.6. Théorème de Bernoulli (Conservation de l'énergie)

(a) Cas sans échange d'énergie

<u>Hypothèses :</u>

- Le fluide est parfait et incompressible
- L'écoulement est permanent
- L'écoulement est dans une conduite lisse

Application du théorème de l'énergie cinétique



La relation de Bernoulli est une équation de conservation de l'énergie mécanique du fluide au cours de son mouvement.

A l'instant t : masse fluide ABCD et à l'instant t+dt : masse fluide A´B´C´D´

Théorème de l'énergie cinétique

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre les instants t et t+dt. La variation de l'énergie cinétique ΔE_c est égale à la somme des travaux des forces extérieures (poids de l'élément fluide, forces de pression).

$$\Delta E_c = \sum W \vec{F}_{ext} \Longrightarrow \frac{1}{2} dm (V_2^2 - V_1^2) = dm \cdot g (z_1 - z_2) + (p_1 S_1 dx_1 - p_2 S_2 dx_2)$$

$$= dm \cdot g (z_1 - z_2) + p_1 \underbrace{S_1 dx_1}_{dV_1} - p_2 \underbrace{S_2 dx_2}_{dV_2}$$

$$\frac{1}{2} dm (V_2^2 - V_1^2) = dm \cdot g (z_1 - z_2) + (p_1 dV_1 - p_2 dV_2)$$

$$dm = \rho dV \longrightarrow dV = \frac{dm}{\rho}$$

$$\frac{1}{2} dm (V_2^2 - V_1^2) = dm \cdot g (z_1 - z_2) + (p_1 dm_1/\rho_1 - p_2 dm_2/\rho_2)$$

$dm_1 = dm_2 = dm$

Fluide incompressible: $\rho_1 = \rho_2 = \rho$

$$\frac{1}{2} \cancel{dm} (V_2^2 - V_1^2) = \cancel{dm} \cdot g (z_1 - z_2) + \cancel{dm} (p_1/\rho - p_2/\rho)$$

$$\frac{1}{2} (V_2^2 - V_1^2) = g (z_1 - z_2) + (p_1/\rho - p_2/\rho)$$

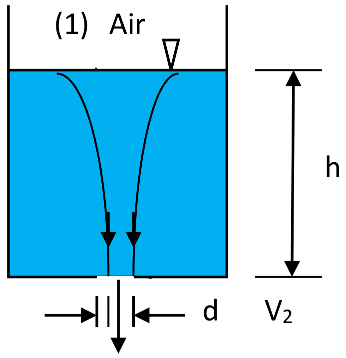
<u>Formes de l'équation de Bernoulli</u>

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{p_1}{\rho} + \dfrac{v_1^2}{2} + g Z_1 = \dfrac{p_2}{\rho} + \dfrac{v_2^2}{2} + g Z_2 & (J/kg) \\[2ex] p_1 + \rho\dfrac{v_1^2}{2} + \rho g Z_1 = p_2 + \rho\dfrac{v_2^2}{2} + \rho g Z_2 & (Pa) \\[2ex] \dfrac{p_1}{\rho g} + \dfrac{v_1^2}{2g} + Z_1 = \dfrac{p_2}{\rho g} + \dfrac{v_2^2}{2g} + Z_2 & (m) \end{array}\right\} \quad (3.7)$$

3.7. Applications du théorème de Bernoulli

3.7.1. Formule de Torricelli

On considère un réservoir de grandes dimensions ouvert à l'atmosphère contenant un liquide de masse volumique ρ et percé d'un petit orifice à sa base à une hauteur h de la surface libre. (S >>s)



On applique le théorème de Bernoulli entre deux points (1) et (2) d'une même ligne de courant (surface libre et la sortie de l'orifice).

$$\cancel{\frac{p_1}{\rho}}+\cancel{\frac{v^2{}_1}{2}}+g\,Z_1=\cancel{\frac{p_2}{\rho}}+\frac{v^2{}_2}{2}+\cancel{g\,Z_2}$$

Hypothèses :

- $p_1 = p_2 = p_{atm}$
- $Z_2 = 0$; $Z_1 = h$ (plan de référence en 2)
- S >>s $\quad$ $V_2 >> V_1$ donc $V_1 = 0$ (négligeable)

$\Longrightarrow$

$$\boxed{V_2=\sqrt{2gh}} \qquad \text{Formule de Torricelli} \tag{3.8}$$

V_2 est la vitesse théorique V_{th}, par conséquent le débit théorique du fluide recueilli à l'orifice de section S_2, est donné par : $Q_{th} = V_{th}.S_2$

$$Q_{th} = S_2.\sqrt{2gh}$$

En réalité à cause des frottements (solide/liquide), la vitesse est plus petite que la vitesse théorique. On écrit : $V_r = \varphi_1 . V_{th}$

$$V_r=\varphi_1.\sqrt{2gh}$$

$$\varphi_1=\frac{V_r}{V_{th}} \tag{3.9}$$

φ_1 : coefficient plus petit que 1 ($\varphi_1 <1$), appelé coefficient de vitesse

La section du fluide à la sortie de l'orifice est : $S_r = \varphi_2\, S_{th}$,

$$\varphi_2=\frac{S_r}{S_{th}} \tag{3.10}$$

φ_2 : coefficient plus petit que 1 (φ_2 <1), appelé coefficient de contraction de section.
Donc le débit réel à la sortie de l'orifice est donc :

$Q_r = S_r. V_r = \varphi_2. S_{th}. \varphi_1. \sqrt{2gh} = \alpha S_{th}. \sqrt{2gh} = \alpha .Q_{th}$

$$\alpha = \frac{Q_r}{Q_{th}} \qquad (3.11)$$

α : coefficient plus petit que 1 ; $\alpha = \varphi_1. \varphi_2$, appelé coefficient de débit.

3.7.2. Calcul du temps de vidange

A un instant t donné, on a :

$$Qv_r = -\frac{dV}{dt} = \alpha S_{th}\sqrt{2gz}$$

$$dt = -\frac{dV}{\alpha S_{th}\sqrt{2gz}} = -\frac{S(z)dz}{\alpha S_{th}\sqrt{2gz}}$$

Si le réservoir est de section constante : S(z) = S

$$t = -\int \frac{dV}{\alpha S_{th}\sqrt{2gz}} = -\int_0^h \frac{Sdz}{\alpha S_{th}\sqrt{2gz}}$$

D'où le temps de vidange total

$$t = \frac{2Sh}{\alpha S_{th}\sqrt{2gz}} \qquad (3.12)$$

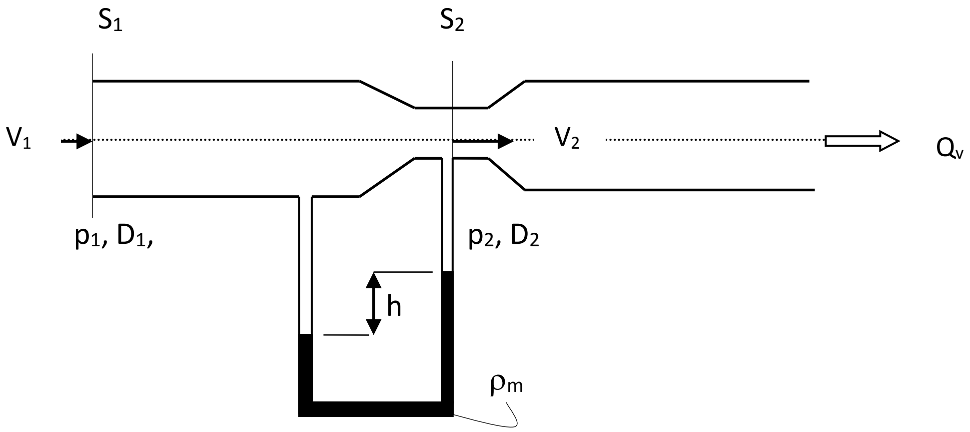
S.h : représente le volume initial (V_0) contenu dans le réservoir

$\alpha S_{th}\sqrt{2gz}$: représente le débit en volume initial (Qv_0) au débit de l'expérience, on peut mettre t sous la forme :

$$t = \frac{2V_0}{Qv_0} \qquad (3.13)$$

3.7.3. Tube de Venturi

Un venturi est un étranglement de conduit, limité par les sections S_1 et S_2 où les pressions sont respectivement p_1 et p_2. Un tel appareil permet de mesurer le débit volumique d'un fluide. La vitesse du fluide circulant dans la conduite augmente dans l'étranglement et sa pression diminue. $V_2 > V_1$ $p_2 < p_1$



On appliquant le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant entre les deux points (1) et (2), on obtient :

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

Ici $z_1 = z_2$ (écoulement horizontal) et l'équation de continuité permet d'écrire :

$$Q_v = S_1 V_1 = S_2 V_2 \Longrightarrow V_2 = S_1 \frac{V_1}{S_2}$$

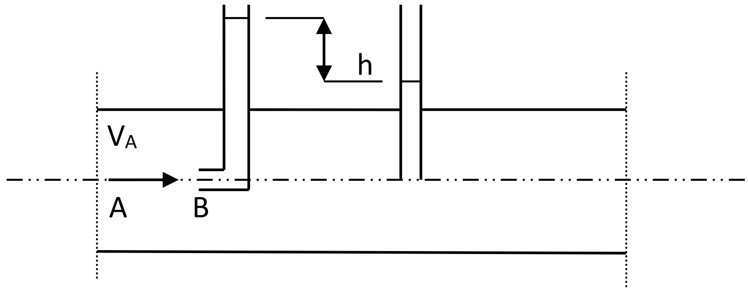
$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} = \frac{V_1^2}{2g}\left[\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1 \right] = \frac{V_1^2}{2g}\left[\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4 - 1 \right]$$

$$p_1 - p_2 = \rho \frac{V_1^2}{2}\left[\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4 - 1 \right] \qquad (3.14)$$

S_1 et S_2 sont connues (caractéristiques du venturi), p_1 et p_2 sont données par les hauteurs du liquide manométrique dans le manomètre, on détermine donc la vitesse V_1.

$$V_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho[\frac{D_1}{D_2})^4 - 1]})} \qquad (3.15)$$

3.7.4 Tube de Pitot



Le tube de Pitot sert à mesurer la vitesse locale d'un fluide en le reliant à la différence de pression d'un manomètre à liquide. On considère un écoulement et on plonge un tube de Pitot de telle sorte qu'il soit parallèle aux lignes de courant. A son embouchure, le fluide peut pénétrer. Une fois qu'il a occupé tout l'espace disponible au sein du tube, il n'ya plus de fluide qui entre et la vitesse au point B, embouchure du tube, est donc nulle. On l'appelle un point d'arrêt de la ligne de courant.

Considérons une ligne de courant A-B.
En A, on a $p = p_A$ (par exemple une pression hydrostatique), $V = V_A = V_\infty$, et $z = z_A$
En B, on a $p = p_B$, $V_B = 0$, et $z = z_A = z_B$

Le théorème de Bernoulli donne donc : $p_A + ½\, \rho V^2_A + \cancel{\rho g z_A} = p_B + \overset{=0}{\cancel{½\, \rho V^2_B}} + \cancel{\rho g z_B}$

$$V_\infty = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_B - p_A)} \tag{3.16}$$

Comme la différence de pression $(p_B - p_A)$ peut être déterminée si on utilise un manomètre (tube en U), on peut déduire la vitesse V_∞

De l'hydrostatique, on a : $(p_B - p_A) = \rho g h$, ce qui donne :

$$V_2 = \sqrt{2gh}$$

3.8. Théorème de Bernoulli (Conservation de l'énergie)

(b) Cas avec échange d'énergie

Il est assez fréquent, dans les installations industrielles, qu'un appareil hydromécanique, placé dans une veine fluide, permette une transformation d'énergie mécanique en énergie hydraulique (une pompe par exemple) ou inversement (une turbine).

Appelons W_i l'énergie massique transférée en (J/kg)

W_{m1} : représente la densité énergétique à l'entrée de la veine

W_{m2} : représente la densité énergétique à la sortie.