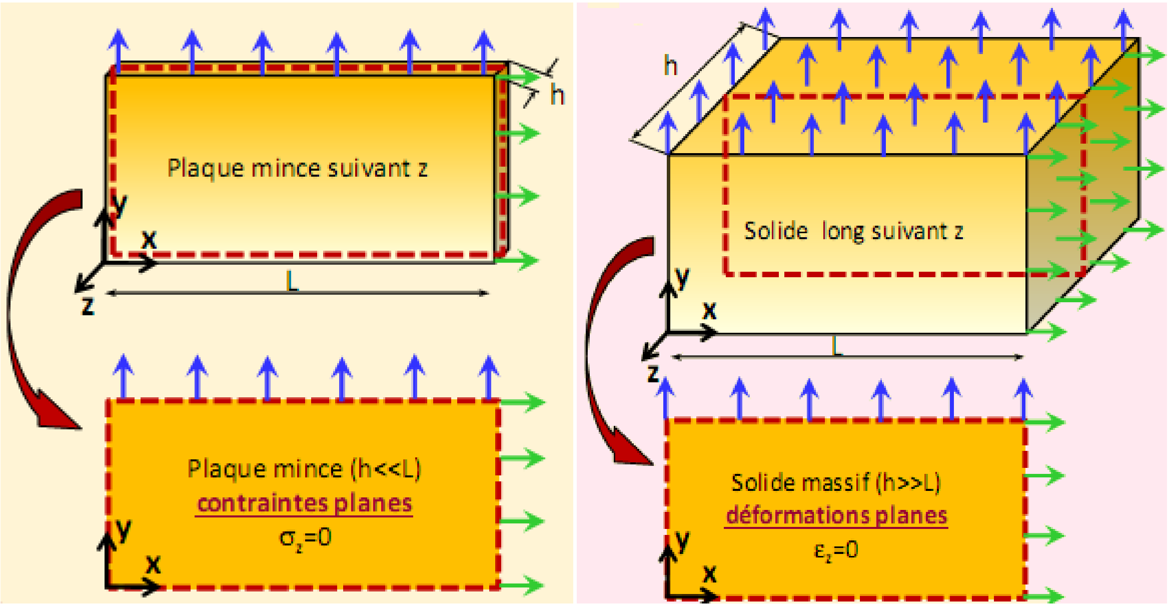
Eléments finis d'élasticité plane

1. Introduction

- ***Problème d'élasticité plane***
  - *Solide a géométrie plane (x, y) ou solide infiniment long suivant z*
  - *Conditions aux limites planes*
  - *Chargement plan (F_x , F_y)*
  - *Loi de comportement 2D (contraintes planes ou déformations planes)*



- ***Hypothèses :***
  - *Petits déplacements*
  - *Petites déformations*
  - *Comportements élastique linéaire*
- ***Résultats :***
  - *Déplacements dans le plan : u (sens x) , v (sens y)*
  - *Déformations dans le plan : $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$*
  - *Contraintes dans le plan : $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$*
  - *Loi de comportement 2D : contraintes planes ou déformations planes*

2. Contraintes en un point :

- ***Solide bidimensionnelle en contrainte plane (en x , y)***
  - *03 composantes de contraintes*
  - σ_{xx}, σ_{yy} *contraintes normales*
  - σ_{xy} *contraintes de cisaillements*

Sous forme matricielle : $[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma_{xx}} & \boldsymbol{\sigma_{xy}} \\ \boldsymbol{sym} & \boldsymbol{\sigma_{yy}} \end{bmatrix}$ *et* $\boldsymbol{\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0}$

3. Déformations en un point :

- ***Solide bidimensionnelle en déformations plane (en x , y)***
  - *03 composantes de déformations*
  - σ_{xx}, σ_{yy} *déformations normales*
  - σ_{xy} *déformations de cisaillements*

Sous forme matricielle : $[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon_{xx}} & \boldsymbol{\varepsilon_{xy}} \\ \boldsymbol{sym} & \boldsymbol{\varepsilon_{yy}} \end{bmatrix}$ *et* $\boldsymbol{\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0}$

4. Loi de comportement :

- ***Hypothèse de contrainte plane :***
  - *Les contraintes dans la direction z nulles :* $\boldsymbol{\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0}$
  - *Hypothèse valable si : la dimension suivant z est très petites (h<<L)*
  - *Le vecteur des contraintes :* $\{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma_x} \\ \boldsymbol{\sigma_y} \\ \boldsymbol{\sigma_{xy}} \end{Bmatrix}$
  - *Le vecteur des déformations :* $\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma_x} \\ \boldsymbol{\sigma_y} \\ \boldsymbol{\gamma_{xy}} \end{Bmatrix}$
  - *La loi de comportement isotrope :* $\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\boldsymbol{H}].\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ *ou* $\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\boldsymbol{C}].\{\boldsymbol{\sigma}\}$

$$[\boldsymbol{H}] = \frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{1-\upsilon^2}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{\upsilon} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\upsilon} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \frac{\boldsymbol{(1-\upsilon)}}{\boldsymbol{2}} \end{bmatrix} \qquad [\boldsymbol{C}] = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{E}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-\upsilon} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{-\upsilon} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{2(1+\upsilon)} \end{bmatrix}$$

Avec :

E : module de YOUNG

υ : coefficient de POISSON

- ***Hypothèse de déformations plane :***
  - *Les déformations dans la direction z nulles :* $\boldsymbol{\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0}$
  - *Hypothèse valable si :* ***la dimension suivant z est très grandes (h>>L)***
  - *Le vecteur des contraintes :* $\{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma_x} \\ \boldsymbol{\sigma_y} \\ \boldsymbol{\sigma_{xy}} \end{Bmatrix}$
  - *Le vecteur des déformations :* $\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma_x} \\ \boldsymbol{\sigma_y} \\ \boldsymbol{\gamma_{xy}} \end{Bmatrix}$
  - *La loi de comportement isotrope :* $\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\boldsymbol{H}].\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ ***ou*** $\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\boldsymbol{C}].\{\boldsymbol{\sigma}\}$

$$[\boldsymbol{H}] = \frac{\boldsymbol{E}}{(\boldsymbol{1+v})(\boldsymbol{1-2v})}\begin{bmatrix} \boldsymbol{1-v} & \boldsymbol{v} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{v} & \boldsymbol{1-v} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \frac{(\boldsymbol{1-2v})}{\boldsymbol{2}} \end{bmatrix} \qquad [\boldsymbol{C}] = \frac{\boldsymbol{1+v}}{\boldsymbol{E}}\begin{bmatrix} \boldsymbol{1-v} & \boldsymbol{-v} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{-v} & \boldsymbol{1-v} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{2} \end{bmatrix}$$

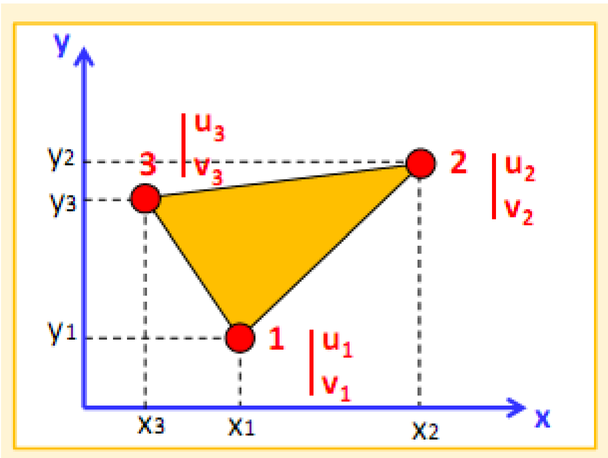
Avec :

E : module de YOUNG

υ : coefficient de POISSON

5. élément fini triangulaire

- ***Approximation Elément fini***



- ***Approximation du champ de déplacement par éléments finis :***

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{N_i(x,y).u_i}$$

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{N_i(x,y).v_i}$$

Avec :

$\boldsymbol{N_i(x,y)}$: $les\ fonctions\ de\ forme$

$\boldsymbol{u_i}, \boldsymbol{v_i}$: $les\ deplacements\ nodaux$

- ***Sous forme matricielle :***

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \cdot \begin{bmatrix} N_1(x,y) & 0 & N_2(x,y) & 0 & N_3(x,y) & 0 \\ 0 & N_1(x,y) & 0 & N_2(x,y) & 0 & N_3(x,y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$N_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & si \quad j = i \\ 0 & si \quad j \neq i \end{cases}$$

***x , y :** sont les cordonnées d'un point de l'élément triangulaire*

***x_j, y_j :** sont les cordonnées du nœud j de l'élément triangulaire*

- ***Déterminatio des $N_i(x,y)$***

Calcul de $N_1(x,y)$:

$$N_1(x,y) = a_1 + b_1 x + c_1 y = \{1 \quad x \quad y\}. \begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} N_1(x_1,y_1) \\ N_1(x_2,y_2) \\ N_1(x_3,y_3) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{det} com \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{T}$$

$$det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \left[+1 \times \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - x_1 \times \begin{vmatrix} 1 & y_2 \\ 1 & y_3 \end{vmatrix} + y_1 \times \begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix} \right]$$

$$= x_2.y_3 - x_3.y_2 - x_1.(y_3 - y_2) + y_1.(x_3 - x_2)$$

$$= x_2.y_3 - x_3.y_2 - x_1.y_3 + x_1.y_2 + y_1.x_3 - y_1.x_2 + y_1.x_1 - y_1.x_1$$

$$= y_3(x_2 - x_1) + y_1(-x_2 + x_1) + y_2(x_1 - x_3) + y_1(-x_1 + x_3)$$

$$= y_3(x_2 - x_1) - y_1(x_2 - x_1) + y_2(x_1 - x_3) - y_1(x_1 - x_3)$$

$$= (y_3 - y_1).(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1).(x_1 - x_3)$$

$$= (y_3 - y_1).(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1).(x_3 - x_1) = y_{31}.x_{21} - y_{21}.x_{31} = 2.A$$

Avec :

$A : l' aire\ du\ triangle$

$$Com\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^T = Com\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= +(x_2.y_3 - x_3.y_2) - (x_1.y_3 - x_3.y_1) + (x_1.y_2 - x_2.y_1) - (y_3 - y_2) + (y_3 - y_1) - (y_2 - y_1) \\ + (x_3 - x_2) - (x_3 - x_1) + (x_2 - x_1)$$

$$Com\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} +(x_2.y_3 - x_3.y_2) & -(x_1.y_3 - x_3.y_1) & +(x_1.y_2 - x_2.y_1) \\ -(y_3 - y_2) & +(y_3 - y_1) & -(y_2 - y_1) \\ +(x_3 - x_2) & -(x_3 - x_1) & +(x_2 - x_1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} +(x_2.y_3 - x_3.y_2) & -(x_1.y_3 - x_3.y_1) & +(x_1.y_2 - x_2.y_1) \\ -(y_3 - y_2) & +(y_3 - y_1) & -(y_2 - y_1) \\ +(x_3 - x_2) & -(x_3 - x_1) & +(x_2 - x_1) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A}\begin{Bmatrix} x_2.y_3 - x_3.y_2 \\ y_2 - y_3 \\ x_3 - x_2 \end{Bmatrix}$$

$$N_1(x,y) = \frac{1}{2A}(x_2.y_3 - x_3.y_2) + \frac{1}{2A}(y_2 - y_3)X + \frac{1}{2A}(x_3 - x_2)Y \\ = \frac{1}{2A}[y_{23}.X + x_{32}.Y + x_2.y_3 - x_3.y_2]$$

Calcul de $N_2(x,y)$:

$$N_2(x,y) = a_2 + b_2x + c_2y = \{1 \quad x \quad y\}.\begin{Bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} N_2(x_1,y_1) \\ N_2(x_2,y_2) \\ N_2(x_3,y_3) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}.\begin{Bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} +(x_2.y_3 - x_3.y_2) & -(x_1.y_3 - x_3.y_1) & +(x_1.y_2 - x_2.y_1) \\ -(y_3 - y_2) & +(y_3 - y_1) & -(y_2 - y_1) \\ +(x_3 - x_2) & -(x_3 - x_1) & +(x_2 - x_1) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A}\begin{Bmatrix} -(x_1.y_3 - x_3.y_1) \\ (y_3 - y_1) \\ -(x_3 - x_1) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A}\begin{Bmatrix} (x_3.y_1 - x_1.y_3) \\ y_{31} \\ x_{13} \end{Bmatrix}$$

$$N_2(x,y) == \frac{1}{2A}[y_{31}.X + x_{13}.Y + x_3.y_1 - x_1.y_3]$$

Calcul de $N_3(x,y)$:

$$N_3(x,y) = a_3 + b_3x + c_3y = \{1 \quad x \quad y\}.\begin{Bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} N_3(x_1,y_1) \\ N_3(x_2,y_2) \\ N_3(x_3,y_3) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}.\begin{Bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} +(x_2.y_3 - x_3.y_2) & -(x_1.y_3 - x_3.y_1) & +(x_1.y_2 - x_2.y_1) \\ -(y_3 - y_2) & +(y_3 - y_1) & -(y_2 - y_1) \\ +(x_3 - x_2) & -(x_3 - x_1) & +(x_2 - x_1) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A}\begin{Bmatrix} +(x_1.y_2 - x_2.y_1) \\ -(y_2 - y_1) \\ (x_2 - x_1) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A}\begin{Bmatrix} (x_1.y_2 - x_2.y_1) \\ y_{12} \\ x_{21} \end{Bmatrix}$$

$$N_3(x,y) = \frac{1}{2A}[y_{12}.X + x_{21}.Y + x_1.y_2 - x_2.y_1]$$

- ***Calcul des déformations***

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\delta u}{\delta x} \\ \dfrac{\delta v}{\delta y} \\ \dfrac{\delta u}{\delta x} + \dfrac{\delta v}{\delta y} \end{Bmatrix}$$

On sait que :

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \cdot\begin{bmatrix} N_1(x,y\ ) & 0 & N_2(x,y) & 0 & N_3(x,y) & 0 \\ 0 & N_1(x,y) & 0 & N_2(x,y) & 0 & N_3(x,y) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\delta u}{\delta x}\\ \dfrac{\delta v}{\delta y}\\ \dfrac{\delta u}{\delta x}+\dfrac{\delta v}{\delta y}\end{Bmatrix}=\cdot\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_3}{\partial x} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_3}{\partial y}\\ \dfrac{\partial N_1}{\partial x} & \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2}{\partial y} & \dfrac{\partial N_3}{\partial x} & \dfrac{\partial N_3}{\partial y}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ v_1\\ u_2\\ v_2\\ u_3\\ v_3\end{Bmatrix}\rightarrow\{\boldsymbol{\varepsilon}\}=[\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{u}\}$$

Avec $[\boldsymbol{B}]$ *la matrice de déformations constante :*

$$[B]=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix}y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0\\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21}\\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12}\end{bmatrix}$$

- **Matrice de rigidité :**

$$[\boldsymbol{K}]=\boldsymbol{h}\int_{A}[\boldsymbol{B}]^{T}.[\boldsymbol{H}].[\boldsymbol{B}]\,\boldsymbol{dA}$$

Comme $[\boldsymbol{B}]$ *est constante :* $[\boldsymbol{K}]=\boldsymbol{h}.\boldsymbol{A}[\boldsymbol{B}]^{\boldsymbol{T}}.[\boldsymbol{H}].[\boldsymbol{B}]$

La matrice de rigidité de l'élément triangulaire à trois nœuds est :

$[k]=\dfrac{h}{4A}$

u_1	v_1	u_2	v_2	u_3	v_3
$H_1\,y_{23}^2 + Gx_{32}^2$	$H_2\,x_{32}\,y_{23} + Gx_{32}\,y_{23}$	$H_1\,y_{31}\,y_{23} + Gx_{32}\,x_{13}$	$H_2\,x_{13}\,y_{23} + Gx_{32}\,y_{31}$	$H_1\,y_{12}\,y_{23} + Gx_{21}\,x_{32}$	$H_2\,x_{21}\,y_{23} + Gx_{32}\,y_{12}$
	$H_1\,x_{32}^2 + Gy_{23}^2$	$H_2\,x_{32}\,y_{31} + Gx_{13}\,y_{23}$	$H_1\,x_{32}\,x_{13} + Gy_{31}\,y_{23}$	$H_2\,x_{32}\,y_{12} + Gx_{21}\,y_{23}$	$H_1\,x_{32}\,x_{21} + Gy_{12}\,y_{23}$
		$H_1\,y_{31}^2 + Gx_{13}^2$	$H_2\,x_{13}\,y_{31} + Gx_{13}\,y_{31}$	$H_1\,y_{12}\,y_{31} + Gx_{13}\,x_{21}$	$H_2\,x_{21}\,y_{31} + Gx_{13}\,y_{12}$
			$H_1\,x_{13}^2 + Gy_{31}^2$	$H_2\,x_{13}\,y_{12} + Gx_{21}\,y_{31}$	$H_1\,x_{13}\,x_{21} + Gy_{12}\,y_{31}$
	sym			$H_1\,y_{12}^2 + Gx_{21}^2$	$H_2\,x_{21}\,y_{12} + Gx_{21}\,y_{12}$
					$H_1\,x_{21}^2 + Gy_{12}^2$

$H_1=\dfrac{2G\,(1-a\,\upsilon)}{(1-\upsilon-a\,\upsilon)}$ $\quad H_2=\dfrac{\upsilon\,H_1}{1-a\,\upsilon}$ $\quad G=\dfrac{E}{2(1+\upsilon)}$

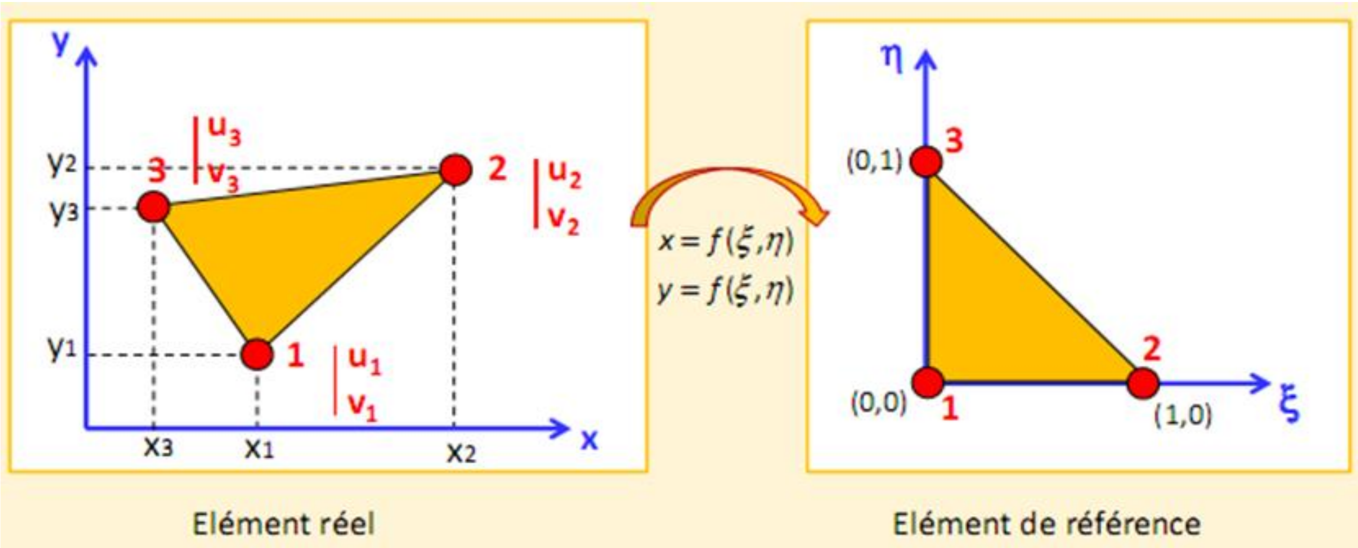
$a=0$ en contraintes planes; $\quad a=1$ en déformations planes

- ***Vecteur des charges équivalentes :***

$$\{f_n\} = \frac{A}{3}\{f_{Ax} \quad f_{Ay} \quad f_{Ax} \quad f_{Ay} \quad f_{Ax} \quad f_{Ay}\}$$

Avec : f_{Ax} et f_{Ay} ***les forces surfaciques***

6. Elément finis triangulaire



- ***Transformation géométrique :***

La transformation géométrique de l'élément de référence a l'élément réel est donne par :

$$x(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{3} N_i(\xi,\eta)\, x \quad ; \quad y(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{3} N_i(\xi,\eta)\; y$$

- ξ ***et*** η ***sont les cordonnées d'un point de l'élément de référence***
- $x(\xi,\eta)$ ***et*** $y(\xi,\eta)$ ***sont les cordonnées d'un point de l'élément réel***
- x ***et*** y ***sont les cordonnées du nœud i de l'élément réel***
- $N_i(\xi,\eta)$ ***sont les fonctions de formes définis par :***

  $$N_i(\xi,\eta) = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i \\ 0 \text{ si } j \neq i \end{cases}$$

- ***Détermination des*** $N_i(\xi,\eta)$ ***:***

Calcul de $N_1(\xi,\eta)$ ***:*** $N_1(\xi,\eta) = a_1 + b_1\xi + c_1\eta = \{1 \quad \xi \quad \eta\}.\begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{Bmatrix}$

$$\begin{Bmatrix} N_1(\xi_1,\eta_1) \\ N_1(\xi_2,\eta_2) \\ N_1(\xi_3,\eta_3) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \eta_1 \\ 1 & \xi_2 & \eta_2 \\ 1 & \xi_3 & \eta_3 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{N_1(\xi,\eta) = 1 - \xi - \eta}$$

Calcul de $N_2(\xi,\eta)$: $N_2(\xi,\eta) = a_2 + b_2\xi + c_2\eta = \{1 \quad \xi \quad \eta\} . \begin{Bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{Bmatrix}$

$$\begin{Bmatrix} N_2(\xi_1,\eta_1) \\ N_2(\xi_2,\eta_2) \\ N_2(\xi_3,\eta_3) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \eta_1 \\ 1 & \xi_2 & \eta_2 \\ 1 & \xi_3 & \eta_3 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{N_2(\xi,\eta) = \xi}$$

Calcul de $N_3(\xi,\eta)$: $N_3(\xi,\eta) = a_3 + b_3\xi + c_3\eta = \{1 \quad \xi \quad \eta\} . \begin{Bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{Bmatrix}$

$$\begin{Bmatrix} N_3(\xi_1,\eta_1) \\ N_3(\xi_2,\eta_2) \\ N_3(\xi_3,\eta_3) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \eta_1 \\ 1 & \xi_2 & \eta_2 \\ 1 & \xi_3 & \eta_3 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{N_3(\xi,\eta) = \eta}$$

$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_1(\xi,\eta) \\ N_2(\xi,\eta) \\ N_3(\xi,\eta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 - \xi - \eta \\ \xi \\ \eta \end{Bmatrix} \Rightarrow$ ***les fonctions de formes de l'élément triangulaire***

- ***Approximation de la géométrie (x,y)***

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{x(\xi,\eta)} \\ \boldsymbol{y(\xi,\eta)} \end{Bmatrix} = \cdot \begin{bmatrix} N_1(\zeta,\eta) & 0 & N_2(\zeta,\eta) & 0 & N_3(\zeta,\eta) & 0 \\ 0 & N_1(\zeta,\eta) & 0 & N_2(\zeta,\eta) & 0 & N_3(\zeta,\eta) \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{y_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{y_2} \\ \boldsymbol{x_3} \\ \boldsymbol{y_3} \end{Bmatrix}$$

- ***Approximation de la solution (u , v)***

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{u(\xi,\eta)} \\ \boldsymbol{v(\xi,\eta)} \end{Bmatrix} = \cdot \begin{bmatrix} N_1(\zeta,\eta) & 0 & N_2(\zeta,\eta) & 0 & N_3(\zeta,\eta) & 0 \\ 0 & N_1(\zeta,\eta) & 0 & N_2(\zeta,\eta) & 0 & N_3(\zeta,\eta) \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} \boldsymbol{u_1} \\ \boldsymbol{v_1} \\ \boldsymbol{u_2} \\ \boldsymbol{v_2} \\ \boldsymbol{u_3} \\ \boldsymbol{v_3} \end{Bmatrix}$$

L'élément triangulaire linaire est un élément isoparametrique car on utilise les mêmes fonctions de formes pour l'approximation géométrique (x,y) et physique (u, v).

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{(1-\xi-\eta).x_1+\xi.x_2+\eta.x_3} \\ \boldsymbol{(1-\xi-\eta).y_1+\xi.y_2+\eta.y_3} \end{Bmatrix} \Longrightarrow \begin{Bmatrix} \boldsymbol{dx} \\ \boldsymbol{dy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{(1-\xi-\eta).x_1+\xi.x_2+\eta.x_3} \\ \boldsymbol{(1-\xi-\eta).y_1+\xi.y_2+\eta.y_3} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{dx} \\ \boldsymbol{dy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} \textbf{ ou } \{\boldsymbol{dx}\} = [J]^T\{\boldsymbol{d\xi}\}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_\xi} & \boldsymbol{x_\eta} \\ \boldsymbol{y_\xi} & \boldsymbol{y_\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_2-x_1} & \boldsymbol{y_2-y_1} \\ \boldsymbol{x_3-x_1} & \boldsymbol{y_3-y_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_{21}} & \boldsymbol{y_{21}} \\ \boldsymbol{x_{31}} & \boldsymbol{y_{31}} \end{bmatrix} \textit{ Matrice Jacobéenne}$$

Matrice Jacobéenne

$$[J] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_{21}} & \boldsymbol{y_{21}} \\ \boldsymbol{x_{31}} & \boldsymbol{y_{31}} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \end{Bmatrix}$$

On peu voir que :

$$\boldsymbol{det}[J] = \overrightarrow{\boldsymbol{a_1}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{a_2}} = \boldsymbol{x_{21}.y_{31} - x_{31}.y_{21} = 2A}$$

- ***Calcul des déformations***

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\delta u}{\delta x} \\ \dfrac{\delta v}{\delta y} \\ \dfrac{\delta u}{\delta y} + \dfrac{\delta v}{\delta x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u'_x \\ v'_y \\ u'_y + v'_x \end{Bmatrix}$$

$$u'_x = u'_\xi \ \xi'_x + u'_\eta \ \eta'_x \quad ; \quad u'_y = u'_\xi \ \xi'_y + u'_\eta \ \eta'_y$$

$$v'_x = v'_\xi \ \xi'_x + v'_\eta \ \eta'_x \quad ; \quad v'_y = v'_\xi \ \xi'_y + v'_\eta \ \eta'_y$$

On peut calculer les déformations :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u'_x \\ v'_y \\ u'_y + v'_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi'_x & \eta'_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi'_y & \eta'_y \\ \xi'_y & \eta'_y & \xi'_x & \eta'_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_\xi \\ u'_\eta \\ v'_\xi \\ v'_\eta \end{Bmatrix} = [B]\{u_n\}$$

Avec : $\begin{bmatrix} \xi'_x & \eta'_x \\ \xi'_y & \eta'_y \end{bmatrix} = [J]^{-1} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} y_{31} & -y_{21} \\ -x_{31} & x_{21} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} y_{31} & y_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{13} & x_{21} \\ x_{31} & x_{21} & y_{31} & y_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u'_\xi \\ u'_\eta \\ v'_\xi \\ v'_\eta \end{Bmatrix}$

$$\begin{Bmatrix} u'_\xi \\ u'_\eta \\ v'_\xi \\ v'_\eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$[B] = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} y_{31} & y_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{13} & x_{21} \\ x_{31} & x_{21} & y_{31} & y_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

$$[B] = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} y_{32} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix}$$

- **Matrice de rigidité :**

En utilisant une loi de comportement 2D (en contraintes ou déformations planes)

$$\{\sigma\} = [H].\{\varepsilon\}$$

On obtient enfin la matrice de rigidité élémentaire :

$$[K] = h\int_A [B]^T.[H].[B]\, dA$$

Comme $[B]$ ***est constante :*** $\quad [K] = h.\,A[B]^T.\,[H].\,[B]$

La matrice de rigidité de l'élément triangulaire à trois nœuds est :

$$
[k] = \frac{h}{4A}\;
\begin{array}{cccccc}
u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix}
H_1 y_{23}^2 + G x_{32}^2 & H_2 x_{32} y_{23} + G x_{32} y_{23} & H_1 y_{31} y_{23} + G x_{32} x_{13} & H_2 x_{13} y_{23} + G x_{32} y_{31} & H_1 y_{12} y_{23} + G x_{21} x_{32} & H_2 x_{21} y_{23} + G x_{32} y_{12} \\
 & H_1 x_{32}^2 + G y_{23}^2 & H_2 x_{32} y_{31} + G x_{13} y_{23} & H_1 x_{32} x_{13} + G y_{31} y_{23} & H_2 x_{32} y_{12} + G x_{21} y_{23} & H_1 x_{32} x_{21} + G y_{12} y_{23} \\
 & & H_1 y_{31}^2 + G x_{13}^2 & H_2 x_{13} y_{31} + G x_{13} y_{31} & H_1 y_{12} y_{31} + G x_{13} x_{21} & H_2 x_{21} y_{31} + G x_{13} y_{12} \\
 & & & H_1 x_{13}^2 + G y_{31}^2 & H_2 x_{13} y_{12} + G x_{21} y_{31} & H_1 x_{13} x_{21} + G y_{12} y_{31} \\
 & \text{sym} & & & H_1 y_{12}^2 + G x_{21}^2 & H_2 x_{21} y_{12} + G x_{21} y_{12} \\
 & & & & & H_1 x_{21}^2 + G y_{12}^2
\end{bmatrix}
$$

$$H_1 = \frac{2G(1-a\upsilon)}{(1-\upsilon-a\upsilon)} \qquad H_2 = \frac{\upsilon H_1}{1-a\upsilon} \qquad G = \frac{E}{2(1+\upsilon)}$$

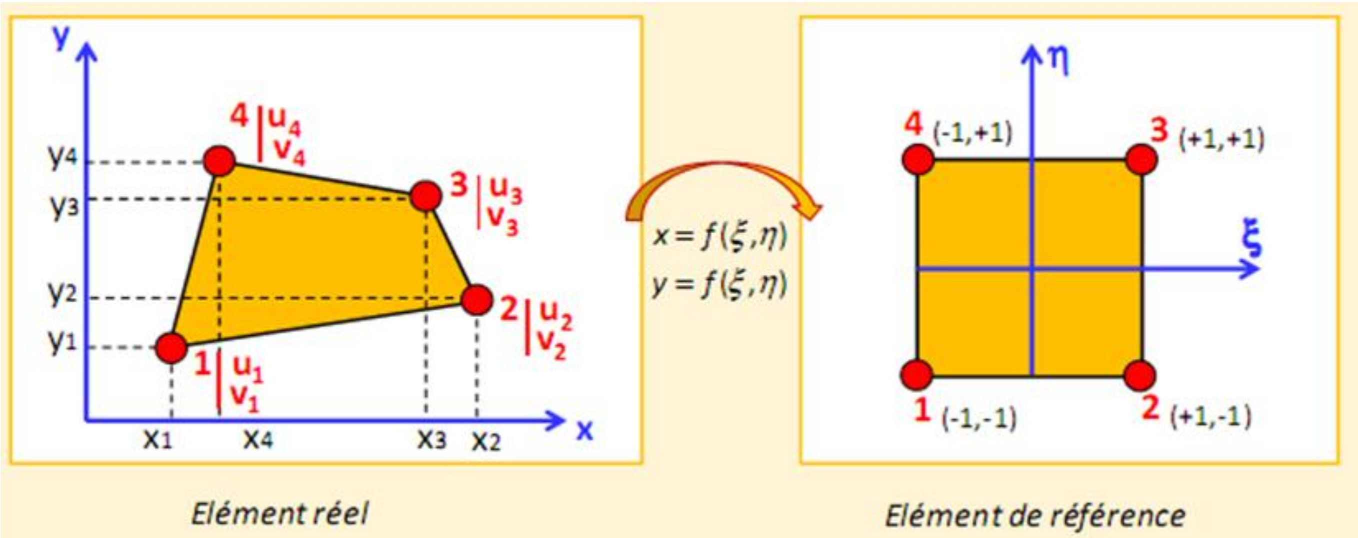
$a = 0$ en contraintes planes; $\qquad a = 1$ en déformations planes

- ***Vecteur des charges équivalentes :***

$$\{f_n\} = \frac{A}{3}\{f_{Ax} \quad f_{Ay} \quad f_{Ax} \quad f_{Ay} \quad f_{Ax} \quad f_{Ay}\}$$

Avec : f_{Ax} et f_{Ay} ***les forces surfaciques***

7. Elément finis quadrilatéral à 4 noeuds



- ***Transformation géométrique***

La transformation géométrique de l'élément de référence a l'élément réel est donne par :

$$x(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)\,x \quad ; \quad y(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)\,y$$

- ***ξ et η sont les cordonnées d'un point de l'élément de référence***
- ***$x(\xi,\eta)$ et $y(\xi,\eta)$ sont les cordonnées d'un point de l'élément réel***
- ***x et y sont les cordonnées du nœud i de l'élément réel***
- ***$N_i(\xi,\eta)$ sont les fonctions de formes définis par :***

  $$N_i(\xi,\eta)=\begin{cases}1 \; si\; j=i\\ 0\; si\; j\neq i\end{cases}$$

- ***Détermination des $N_i(\xi,\eta)$***

Calcul de $N_1(\xi,\eta)$: $N_1(\xi,\eta)=a_1+b_1\xi+c_1\eta+d_1\xi\eta=\{1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta\}.\begin{Bmatrix}a_1\\b_1\\c_1\\d_1\end{Bmatrix}$

$$\begin{Bmatrix}N_1(\xi_1,\eta_1)\\N_1(\xi_2,\eta_2)\\N_1(\xi_3,\eta_3)\\N_1(\xi_4,\eta_4)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&-1&1\\1&1&-1&-1\\1&1&1&1\\1&-1&1&-1\end{bmatrix}.\begin{Bmatrix}a_1\\b_1\\c_1\\d_1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\0\\0\\0\end{Bmatrix}\;\Rightarrow\;\begin{Bmatrix}a_1\\b_1\\c_1\\d_1\end{Bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{Bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{Bmatrix}$$

$$N_1(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi-\eta+\xi\eta)$$

Calcul de $N_2(\xi,\eta)$: $N_2(\xi,\eta)=a_2+b_2\xi+c_2\eta+d_2\xi\eta=\{1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta\}.\begin{Bmatrix}a_2\\b_2\\c_2\\d_2\end{Bmatrix}$

$$\begin{Bmatrix}N_2(\xi_1,\eta_1)\\N_2(\xi_2,\eta_2)\\N_2(\xi_3,\eta_3)\\N_2(\xi_4,\eta_4)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&-1&1\\1&1&-1&-1\\1&1&1&1\\1&-1&1&-1\end{bmatrix}.\begin{Bmatrix}a_2\\b_2\\c_2\\d_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\1\\0\\0\end{Bmatrix}\;\Rightarrow\;\begin{Bmatrix}a_2\\b_2\\c_2\\d_2\end{Bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{Bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{Bmatrix}$$

$$N_2(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi-\eta-\xi\eta)$$

Calcul de $N_3(\xi,\eta)$: $N_3(\xi,\eta)=a_3+b_3\xi+c_3\eta+d_3\xi\eta=\{1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta\}.\begin{Bmatrix}a_3\\b_3\\c_3\\d_3\end{Bmatrix}$

$$\begin{Bmatrix} N_3(\xi_1,\eta_1) \\ N_3(\xi_2,\eta_2) \\ N_3(\xi_3,\eta_3) \\ N_3(\xi_4,\eta_4) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

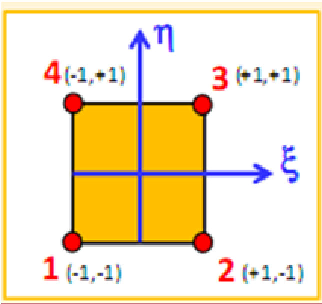
$$N_3(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi+\eta+\xi\eta)$$

Calcul de $N_4(\xi,\eta)$: $N_4(\xi,\eta) = a_4 + b_4\xi + c_4\eta + d_4\xi\eta = \{1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta\}.\begin{Bmatrix} a_4 \\ b_4 \\ c_4 \\ d_4 \end{Bmatrix}$

$$\begin{Bmatrix} N_4(\xi_1,\eta_1) \\ N_4(\xi_2,\eta_2) \\ N_4(\xi_3,\eta_3) \\ N_4(\xi_4,\eta_4) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} a_4 \\ b_4 \\ c_4 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} a_4 \\ b_4 \\ c_4 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$N_4(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi+\eta-\xi\eta)$$

Resumé : $N_i(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi_i\xi)(1-\eta_i\eta)$ $\Rightarrow$



- ***Approximation de la géométrie (x,y)***

$$\begin{Bmatrix} x(\xi,\eta) \\ y(\xi,\eta) \end{Bmatrix} = \cdot \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \end{Bmatrix}$$

- ***Approximation de la solution (u , v)***

$$\begin{Bmatrix} u(\xi,\eta) \\ v(\xi,\eta) \end{Bmatrix} = \cdot \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} x_{21}(1-\eta)+x_{34}(1+\eta) & y_{21}(1-\eta)+y_{34}(1+\eta) \\ x_{41}(1-\xi)+x_{32}(1+\xi) & y_{41}(1-\xi)+y_{32}(1+\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{21} & y_{21} \\ x_{31} & y_{31} \end{bmatrix}$$ ***Matrice Jacobéenne***

$$det[J] = A_0 + A_1\xi + A_2\eta$$

Avec : $A_0 = \frac{1}{8}(y_{42}x_{31} - y_{31}x_{42})$; $4A_0$ *est l'airede l'élément*

$A_1 = \frac{1}{8}(y_{34}x_{21} - y_{21}x_{34})$; $A_2 = \frac{1}{8}(y_{41}x_{32} - y_{32}x_{41})$

- ***Calcul des déformations***

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{'x} \\ v_{'y} \\ u_{'y} + v_{'x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{'\xi}\ \xi_{'x} + u_{'\eta}\ \eta_{'x} \\ v_{'\xi}\ \xi_{'y} + v_{'\eta}\ \eta_{'y} \\ u_{'\xi}\ \xi_{'y} + u_{'\eta}\ \eta_{'y} + v_{'\xi}\ \xi_{'x} + v_{'\eta}\ \eta_{'x} \end{Bmatrix}$$

On peut s'écrire :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{'x} \\ v_{'y} \\ u_{'y} + v_{'x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{'x} & \eta_{'x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{'y} & \eta_{'y} \\ \xi_{'y} & \eta_{'y} & \xi_{'x} & \eta_{'x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{'\xi} \\ u_{'\eta} \\ v_{'\xi} \\ v_{'\eta} \end{Bmatrix} = [B]\{u_n\}$$

Avec : $\begin{bmatrix} \xi_{'x} & \eta_{'x} \\ \xi_{'y} & \eta_{'y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{21} & J_{22} \\ J_{21} & J_{22} & J_{11} & J_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{'\xi} \\ u_{'\eta} \\ v_{'\xi} \\ v_{'\eta} \end{Bmatrix}$

$$\begin{Bmatrix} u_{'\xi} \\ u_{'\eta} \\ v_{'\xi} \\ v_{'\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+\eta & 0 & 1-\eta & 0 & 1+\eta & 0 & -1-\eta & 0 \\ -1+\xi & 0 & -1-\xi & 0 & 1+\xi & 0 & 1-\xi & 0 \\ 0 & -1+\eta & 0 & 1-\eta & 0 & 1+\eta & 0 & -1-\eta \\ 0 & -1+\xi & 0 & -1-\xi & 0 & 1+\xi & 0 & 1-\xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

On calcule finalement la matrice de déformation $[B]$ **:**

$$[B] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{21} & J_{22} \\ J_{21} & J_{22} & J_{11} & J_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1+\eta & 0 & 1-\eta & 0 & 1+\eta & 0 & -1-\eta & 0 \\ -1+\xi & 0 & -1-\xi & 0 & 1+\xi & 0 & 1-\xi & 0 \\ 0 & -1+\eta & 0 & 1-\eta & 0 & 1+\eta & 0 & -1-\eta \\ 0 & -1+\xi & 0 & -1-\xi & 0 & 1+\xi & 0 & 1-\xi \end{bmatrix}$$

$$[B]_{(3\times 8)} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} j_{11}(-1+\eta)+j_{12}(-1+\xi) & 0 & j_{11}-j_{12}-j_{11}\eta-j_{12}\xi & 0 & j_{11}+j_{12}+j_{11}\eta+j_{12}\xi & 0 & -j_{11}+j_{12}-j_{11}\eta-j_{12}\xi & 0 \\ 0 & j_{21}(-1+\eta)+j_{22}(-1+\xi) & 0 & j_{21}-j_{22}-j_{21}\eta-j_{22}\xi & 0 & j_{21}+j_{22}+j_{21}\eta+j_{22}\xi & 0 & -j_{21}+j_{22}-j_{21}\eta-j_{22}\xi \\ j_{21}(-1+\eta)+j_{22}(-1+\xi) & j_{11}(-1+\eta)+j_{12}(-1+\xi) & j_{21}-j_{22}-j_{21}\eta-j_{22}\xi & j_{11}-j_{12}-j_{11}\eta-j_{12}\xi & j_{21}+j_{22}+j_{21}\eta+j_{22}\xi & j_{11}+j_{12}+j_{11}\eta+j_{12}\xi & -j_{21}+j_{22}-j_{21}\eta-j_{22}\xi & -j_{11}+j_{12}-j_{11}\eta-j_{12}\xi \end{bmatrix}$$

la matrice de déformation $[B]$ **n'est pas constante en** ξ **et** η **comme pour l'élément triangulaire à trois nœuds, les termes qui la constituant sont des fractions rationnelles en** ξ **et** η

Matrice de rigidité :

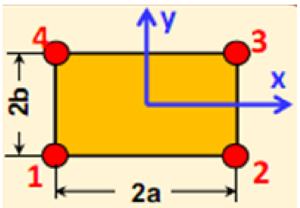
En utilisant une loi de comportement 2D (en contraintes ou déformations planes)

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\boldsymbol{H}].\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$$

On obtient enfin la matrice de rigidité élémentaire :

$$[\boldsymbol{K}] = \boldsymbol{h}\int_{A}[\boldsymbol{B}]^{T}.[\boldsymbol{H}].[\boldsymbol{B}]\,\boldsymbol{dA}$$

$$[\boldsymbol{K}] = \boldsymbol{h}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\left([\boldsymbol{B}(\xi,\eta)]^{T}.[\boldsymbol{H}].[\boldsymbol{B}(\xi,\eta)]\right)\boldsymbol{J}(\xi,\eta)\,\boldsymbol{d\xi d\eta}$$



En cas de maillage régulier → l'élément quadrilatéral est un rectangle (2a×2b) :

La matrice de rigidité de l'élément quadrilatéral à quatre nœuds est :

$[k] = \frac{ab}{12}$

	u_1	v_1	u_2	v_2	u_3	v_3	u_4	v_4
u_1	$\frac{4H_1}{a^2}+\frac{4G}{b^2}$	$\frac{3c}{ab}$	$\frac{-4H_1}{a^2}+\frac{2G}{b^2}$	$\frac{3d}{ab}$	$\frac{-2H_1}{a^2}-\frac{2G}{b^2}$	$\frac{-3c}{ab}$	$\frac{2H_1}{a^2}-\frac{4G}{b^2}$	$\frac{-3d}{ab}$
v_1		$\frac{4H_1}{b^2}+\frac{4G}{a^2}$	$\frac{-3d}{ab}$	$\frac{2H_1}{b^2}-\frac{4G}{a^2}$	$\frac{-3c}{ab}$	$\frac{-2H_1}{b^2}-\frac{2G}{a^2}$	$\frac{3d}{ab}$	$\frac{-4H_1}{b^2}-\frac{2G}{a^2}$
u_2			$\frac{4H_1}{a^2}+\frac{4G}{b^2}$	$\frac{-3c}{ab}$	$\frac{2H_1}{a^2}-\frac{4G}{b^2}$	$\frac{3d}{ab}$	$\frac{-2H_1}{a^2}-\frac{2G}{b^2}$	$\frac{3c}{ab}$
v_2				$\frac{4H_1}{b^2}+\frac{4G}{a^2}$	$\frac{-3d}{ab}$	$\frac{-4H_1}{b^2}+\frac{2G}{a^2}$	$\frac{3c}{ab}$	$\frac{-2H_1}{b^2}-\frac{2G}{a^2}$
u_3					$\frac{4H_1}{a^2}+\frac{4G}{b^2}$	$\frac{3c}{ab}$	$\frac{-4H_1}{a^2}+\frac{2G}{b^2}$	$\frac{3d}{ab}$
v_3						$\frac{4H_1}{b^2}+\frac{4G}{a^2}$	$\frac{-3d}{ab}$	$\frac{2H_1}{b^2}-\frac{4G}{a^2}$
u_4							$\frac{4H_1}{a^2}+\frac{4G}{b^2}$	$\frac{-3c}{ab}$
v_4								$\frac{4H_1}{b^2}+\frac{4G}{a^2}$

$c = H_2 + G;\ d = H_2 - G;\ G = \frac{E}{2(1+\upsilon)}$

$H_1 = \frac{2G(1-\alpha\upsilon)}{(1-\upsilon-\alpha\upsilon)}$; $H_2 = \frac{\upsilon H_1}{1-\alpha\upsilon}$

$\alpha = 0$ en C.P. ; $\alpha = 1$ en D.P.

Vecteur des charges équivalentes :

$$\{\boldsymbol{f_n}\} = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\left(\{\boldsymbol{N_u}(\xi,\eta)\}\boldsymbol{f_{Ax}} + \{\boldsymbol{N_v}(\xi,\eta)\}\boldsymbol{f_{Ay}}\right)\boldsymbol{J}(\xi,\eta)\,\boldsymbol{d\xi d\eta}$$

Avec : $\mathbf{f_{Ax}}$**et** $\boldsymbol{f_{Ay}}$ ***les forces surfaciques***