Université Abdelhafid Boussouf - Mila $2022-2023$
Institut des Sciences et de la Technologie
Département des Mathématiques et informatique **Algèbre** 2

Série no 2 : Applications linéaires

Exercice 1. *soit*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P - XP' \end{array}$$

1. Montrer que est une application linéaire.
2. Déterminer son noyau et son image.

Exercice 2. *Pour tout réel m, soit l'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ définie par :*

$$f(x, y, z) = (x - y + z, mx - 2y + mz, -x + y, -mx + my - mz)$$

***1.** Montrer que f est linéaire.*
***2.** Déterminer une base du noyau de f. Pour quelle valeur de m l'application f est-elle injective ? f est-elle bijective ?*
***3.** Déterminer une base de l'image de f.*

Exercice 3. *Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la donnée des images des vecteurs de la base :*

$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3, \quad u(e_2) = 3e_2, \quad u(e_3) = -4e_1 + 4e_3.$$

***1.** Déterminer une base de $\ker u$. u est-il injectif ? peut-il être surjectif ? Pourquoi ?*
***2.** Déterminer une base de $\operatorname{Im} u$. Quel est le rang de u ?*
***3.** Montrer que $E = \ker u \oplus \operatorname{Im} u$.*

Exercice 4. *Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u = (1, 0, 0)$ et $v = (1, 1, 1)$. Trouver un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont le noyau est E.*

Exercice 5. *Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Démontrer que*

$$g \circ f = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Im}(f) \subset \ker(g).$$

Exercice 6. *(Supplémentaire)*
Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *une application linéaire telle que :*

$$(1,2,0) \in \mathrm{Ker}(f), \quad f(0,0,1) = (1,0), \quad f(0,t,0) = (t,t)\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

1. *Déterminer* $f(x,y,z)$.
2. *Trouver une base et la dimension du* $\mathrm{Ker}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$.
3. *Trouver l'ensemble des vecteurs dont l'image est le vecteur* $(0,1)$*. Est - il un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *?*

Exercice 7. *(Supplémentaire)*
On considère $\mathbb{C}$ *comme un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel. On définit l'application* f *par*

$$f : z \longmapsto iz - i\bar{z}.$$

1. *Montrer que* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$.
2. *Déterminer* $\mathrm{Ker}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$.
3. *Déterminer* f^2.
4. *En déduire que l'endomorphisme* $id_{\mathbb{C}} + 2f$ *est inversible et calculer son inverse.*

0.1 Solutions

Solution d'Exercice 1 :
Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(\lambda P+Q) &= (\lambda P+Q) - X(\lambda P+Q)' \\ &= \lambda P + Q - X(\lambda P' + Q') \\ &= \lambda(P - XP') + Q - XQ' \\ &= \lambda f(P) + f(Q). \end{aligned}$$

Alors, f est une application linéaire.

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(f) &= \{P \in \mathbb{R}[X] | P - XP' = 0\} \\ &= \left\{ P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k | \sum_{k=0}^{n} a_k X^k - X \sum_{k=1}^{n} a_k X^k = 0 \right\} \\ &= \left\{ P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k | a_0 \sum_{k=1}^{n} (a_k - k a_k) X^k = 0 \right\} \\ &= \left\{ P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k | a_0 = 0 \wedge a_k - k a_k = 0, \forall k = 1, \dots n \right\} \\ &= \left\{ P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k | a_0 = 0 \wedge a_k = 0, \forall k = 2, \dots n \right\} \\ &= \{P = a_1 X\} \\ &= \mathrm{Vect}\{X\}. \end{aligned}$$

D'autre part, soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Si $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ est élément de $\mathrm{Im}(f)$, il existe $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ tel que $Q = P' - XP$ soit, d'après le calcul précédent,

$$b_k = a_k(1-k).$$

On en déduit $b_1 = 0$ et donc $Q \in F = \mathrm{Vect}(X^k; k \neq 1)$. Réciproquement, soit $Q = \sum_{k=0, k\neq 1}^{n} b_k X^k$ un élément de F, c'est-à-dire un polynôme sans terme en X. Alors, si on pose $a_k = (1-k)^{-1} b_k$, $k \neq 1$, et $a_1 = 0$, le calcul précédent montre que $P' - XP = Q$ et donc $Q \in \mathrm{Im}(f)$. Ainsi, $\mathrm{Im}(f) = F$.

Solution de Exercice 2 : 1. Soient $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f((x,y,z) + \lambda(x',y',z')) &= f((x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z')) \\ &= ((x+\lambda x') - (y+\lambda y') + (z+\lambda z'), m(x+\lambda x') - 2(y+\lambda y') \\ &\quad +m(z+\lambda z'), -(x+\lambda x') + (y+\lambda y'), -m(x+\lambda x') \\ &\quad +m(y+\lambda y') - m(z+\lambda z')) \\ &= (x-y+z, mx-2y+mz, -x+y, -mx+my-mz) + \lambda \times \\ &\quad (x'-y'+z', mx'-2y'+mz', -x'+y', -mx'+my'-mz')) \\ &= f(x,y,z) + \lambda f(x',y',z'), \end{aligned}$$

d'où, f est une application linéaire.

2. Puisque

$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ mw-2y+mz=0 \\ -x+y=0 \\ -mx+my-mz=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x-=y \\ z=0 \\ (m-2)x=0 \end{cases}$$

alors :

Cas 1 : si $m \neq 2$. Le système ci-dessus donne $\mathrm{Ker}(f)=\{(0,0,0)\}$, donc $\emptyset$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Cas 2 : si $m=2$. Le système ci-dessus donne dans ce cas $\mathrm{Ker}(f) = \{(x,x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\{(1,1,0)\}$ et comme $(1,1,0) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, alors $\{(1,1,0)\}$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Donc, f est injective si et seulement si $m \in \mathbb{R}-\{2\}$. D'autre part, on a

$$\dim(\mathrm{Im}(f) \leq \dim \mathbb{R}^3 = 3 < 4 = \dim \mathbb{R}^4,$$

alors f n'est pas bijective pour tout $m \in \mathbb{R}$.

3.Considérons $\{e_1 := (1,0,0), e_2 := (0,1,0), e_3 := (0,0,1)\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\} \\ &= \mathrm{Vect}\{(1,m,-1,-m), (-1,-2,1,m), (1,m,0,-m)\}. \end{aligned}$$

De plus on a

$$\dim(\mathrm{Im}(f) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim(\mathrm{Ker}(f) = \begin{cases} 3, & \text{si } m \neq 2, \\ 2, & \text{si } m = 2. \end{cases}$$

Donc :

Cas 1 : si $m \neq 2$. La famille $\{(1,m,-1,-m), (-1,-2,1,m), (1,m,0,-m)\}$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Cas 2 : si $m=2$. Alors, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\{(1,2,-1,-2), (1,2,0,-2)\}$. D'où, la famille $\{(1,2,-1,-2), (1,2,0,-2)\}$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Solution de Exercice 3 : 1. On commence par calculer $u(x,y,z)$. On a

$$u(x,y,z) = u(xe_1+ye_2+ze_3) = xu(e_1)+yu(e_2)+zu(e_3)$$

soit

$$u(x,y,z) = (-2x-4z, 3y, 2x+4z).$$

On a donc

$$(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(u) \iff \begin{cases} -2x-4z &= 0 \\ 3y &= 0 \\ 2x+4z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= -2z \\ y &= 0 \\ z &= z \end{cases}$$

On a donc $\ker(u) = \mathrm{Vect}(-2,0,1)$ et le vecteur $(-2,0,1)$ est une base de ker. $\ker(u)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, et donc l'endomorphisme u n'est pas injectif. Comme u est un endomorphisme de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{R}^3$, il n'est pas non plus surjectif, car on a alors

$$u \text{ injective} \iff u \text{ surjective} \iff u \text{ bijective}.$$

2. On sait, d'après le théorème du rang, que $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension 2. On sait aussi que $(u(e_1), u(e_2), u(e_3))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(u)$. Il suffit donc d'en extraire une famille libre à deux éléments. Mais on vérifie immédiatement que $(u(e_1), u(e_2))$ est une telle famille. C'est donc une base de $\mathrm{Im}(u)$ qui est de rang 2.
3. Il suffit de montrer que la réunion d'une base de $\ker(u)$ et d'une base de $\mathrm{Im}(u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Autrement dit, avec les calculs réalisés précédemment, il suffit de voir que la famille $((-2,0,1),(-2,0,2),(0,3,0))$ est une famille libre.

Solution de Exercice 4 : Première méthode : Une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même est définie par

$$f(x,y,y) = (a_1x + b_1y + c_1z, a_2x + b_2y + c_2z, a_3x + b_3y + c_3z)$$

où les a_i, b_i, c_i sont des réels. On va déterminer quelle(s) valeur(s) leur donner pour que $f(u) = 0$ et $f(v) = 0$. On a

$$f(u) = 0 \iff (a_1, a_2, a_3) = (0,0,0)$$

et

$$f(v) = 0 \iff (a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2, a_3 + b_3 + c_3) = (0,0,0).$$

On obtient $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ et $b_1 = -c_1, b_2 = -c_2, b_3 = -c_3$. Ainsi, l'application f suivante convient

$$(x,y,z) \longmapsto (y-z, y-z, y-z).$$

Puisque $u, v \in \ker(f)$, le sous-espace vectoriel E engendré par (u,v) est contenu dans $\ker(f)$. De plus, f n'étant pas identiquement nulle, son noyau est de dimension au plus 2. On en déduit que $\ker(f)$ est de dimension exactement 2, et que $\ker(f) = E$.
Deuxième méthode : Une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même est complètement définie par l'image d'une base. Complétons d'abord (u,v) en une base (c'est possible, car c'est une famille libre). Posons $w = (0,0,1)$. Alors on vérifie facilement que la famille (u,v,w) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ à trois éléments, donc une base de $\mathbb{R}^3$. On définit f par

$$f(u) = (0,0,0), f(v) = (0,0,0), f(w) = (1,0,0).$$

Ceci définit parfaitement f et, comme dans la première méthode, on prouve que le noyau de f est exactement E.

Solution de Exercice 5 : Supposons d'abord que $g \circ f = 0$, et prenons $y \in \mathrm{Im}(f)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Mais alors, $g(y) = g \circ f(x) = 0$, et donc $y \in \ker(g)$.
Réciproquement, supposons que $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(g)$. Alors, pour tout $x \in E$, $f(x) \in \mathrm{Im}(f) \subset \ker(g)$, et donc $g(f(x)) = 0$, prouvant que $g \circ f = 0$.

Solution de Exercice 6 :
1. On a

$$(1,2,0) \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(1,2,0) = 0_{\mathbb{R}^2} = (0,0)$$

et puisque f est une application linéaire, on en déduit que

$$f(1,0,0) = -2f(0,1,0) = (-2,-2).$$

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Le fait que f est une application linéaire implique

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= f(x(1,0,0)) + f(y(0,1,0)) + f(z(0,0,1)) \\ &= xf(1,0,0) + yf(0,1,0) + zf(0,0,1) \\ &= x(-2,-2) + y(1,1) + z(1,0) \\ &= (-2x+y+z, -2x+y). \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{Kef}(f) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x+y+z = 0 \text{ et } -2x+y = 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 2x \text{ et } z = 0\} \\ &= \{(x,2x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}\{(1,2,0)\}. \end{aligned}$$

Puisque $(1,2,0) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, alors $\{(1,2,0)\}$ est une base de $\mathrm{Kef}(f)$. D'autre part, on sait que

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \\ &= \mathrm{Vect}\{(-2,-2),(1,1),(1,0)\} \\ &= \mathrm{Vect}\{(1,1),(1,0)\}. \end{aligned}$$

Comme $(1,1)$ et $(1,0)$ ne sont pas colinéaire, alors $\{(1,1),(1,0)\}$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

3. On a

$$\begin{aligned} f^{-1}(0,1) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = (0,1)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x+y+z = 0 \text{ et } -2x+y = 1\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -1 \text{ et } y = 2x+1\} \\ &= \{(x,2x+1,-1) \mid x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

$f^{-1}(0,1)$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, car $0_{\mathbb{R}^3} \notin f^{-1}(0,1)$.

Solution de Exercice 7 : 1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$f(z) = -2\,\mathrm{Im}(z).$$

Donc, par $\mathbb{R}$-linéarité de la partie imaginaire, $f \in \mathcal{L}(C)$.

2. On a, d'après le calcul précédent,

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(z) = \mathbb{R}.$$

3. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$f^2(z) = f(f(z)) = \mathrm{Im}\,\mathrm{Im}((z)) = 0,$$

donc $f^2 = 0$.

4. Posons $g = id_{\mathbb{C}} + 2f$. Puisque $f^2 = 0$, alors on a

$$g^2 - 2g + id_{\mathbb{C}} = (g - id_{\mathbb{C}})^2 = (2f)^2 = 4f^2 = 0,$$

d'où

$$g \circ (2id_{\mathbb{C}} - g) = (2id_{\mathbb{C}} - g) \circ g = id_{\mathbb{C}}.$$

L'endomorphisme g est donc un isomorphisme et on a

$$g^{-1} = 2id_{\mathbb{C}} - g = id_{\mathbb{C}} - 2u.$$