Centre Universitaire de Mila
Institut des Sciences et de la Technologie
Deuxième année LMD Mathématiques 2022/2023

Matière : *Algèbre 4*
Responsable : *Y. Halim*

Série de TD N° 3

Exercice 1 :

Soit q une forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q((x_1, x_2, x_3)) = x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + x_2x_3.$$

1. Déterminer la forme polaire associée à q .
2. Déterminer la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer $ker(q)$ le noyau de q et $rg(q)$ le rang de q.
4. q est-elle non dégénérée ?

Exercice 2 :

Soit dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

1. Déterminer q la forme quadratique associée.
2. Déterminer f la forme bilinéaire symétrique définie sur $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice associée de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Soit $B' = \{(1, 0, 0); (-1, 1, 0); (-1, 1, 1)\}$ une base de de $\mathbb{R}^3$.
   - Montrer que B' est une base orthogonal.
4. Déterminer $F^{\perp}$ où $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0, z = 0\}$.

Exercice 3 :(Intérrogation 2022)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Déterminer f la forme bilinéaire symétrique définie sur $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice associée de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer q la forme quadratique associée.
3. Montrer que q est non dégénérée.

.

Exercice 4 :

On définit les formes quadratiques suivantes dans $\mathbb{R}^3$:

1. $q_1(X) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_1x_3$.
2. $q_2(X) = 3x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2x_3$.
3. $q_3(X) = x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + x_2x_3$.

Donner les réductions de Gauss et en déduire la signature et le rang et une base orthogonal de chacune.

Exercice 5 :

Soit q une forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q((x_1, x_2, x_3)) = x_1x_2 - x_2x_3 + 2x_1x_3.$$

1. Déterminer la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$et déduire sa rang.
2. Montrer que $\varepsilon_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \varepsilon_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right), \varepsilon_3 = (1, 2, 1)$ forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.
3. Déduire une forme réduite de q et $sg(q)$ la signature de$q$.
4. Déterminer un vecteur isotrope pour q.

Exercice 6 : (Examen 2022)

Soit l'application

$$\begin{array}{llll} f_\alpha : & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R} \\ & ((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) & \mapsto x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + \alpha x_1y_2 + \alpha x_2y_1 \end{array}$$

1. Montrer que f_α est une forme bilinéaire symétriques.
2. Déterminer la forme quadratique associé a f_α.
3. Déterminer la matrice de f_α dans la base $\{\varepsilon_1 = (1, 0, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0), \varepsilon_3 = (1, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer suivant les valeurs de α le rang de f_α
5. Déterminer les valeurs de α pour f_α soit non dégénérée.

Exercice 7 : (Examen 2016)

Soit q_α la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$q_\alpha(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + (1 + \alpha)x_2^2 + (1 + \alpha + \alpha^2)x_3^2 + 2x_1x_2 - 2\alpha x_2x_3$$

1. Déterminer la matrice A_α associée à q_α dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les valeurs de α pour les quelles q_α est non dégénérée.
3. Donner une réduction de Gauss de q_α.
4. Déterminer suivant les valeurs de α la signature de q_α.
5. Déterminer une base orthogonal pour q_α.