Université Abdelhafid Boussouf de Mila
Institut des sciences et de la technologie
Deuxième année LMD Mathématiques 2022/2023

Matière : *Algèbre 4*
Responsable : *Y. Halim*

Série de TD N° 2

Exercice 1 :

Montrer que les applications suivantes sont des formes bilinéaires, Sont-t-elles symétriques, anti-symétriques ?

1.

$$\begin{aligned} \Psi : \quad \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] &\to \mathbb{R} \\ (P, Q) &\mapsto \int_0^2 xP(x)Q'(x)dx \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{C} &\to \mathbb{R} \\ ((x_1, y_1), (x_2 + iy_2)) &\mapsto x_1x_2 - x_1y_2 + x_2y_1 - y_1y_2 \end{aligned}$$

Exercice 2 :

Soit Ψ l'application définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par :

$$\begin{aligned} \Psi : \quad \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] &\to \mathbb{R} \\ (P, Q) &\mapsto \int_0^1 P(x)Q(1-x)dx \end{aligned}$$

1. Montrer que Ψ est une forme bilinéaire symétrique.
2. Déterminer la matrice de Ψ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Montrer que Ψ est non dégénérée.

Exercice 3 :

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 1 & 6 & -3 \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

1. Justifier que la matrice A est symétrique.
2. Déterminer la forme bilinéaire symétrique définie sur $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée dans la base canonique est la matrice A.
3. Déterminer la forme quadratique associée.

Exercice 4 :

Soient les formes bilinéaires suivantes

$$\begin{array}{rcl} f: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ & ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) & \mapsto x_1y_1 + 2x_2y_2 - 4x_2y_1 - 4x_1y_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} g: & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R} \\ & ((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) & \mapsto 3x_1y_1 - 5x_2y_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_3 + 3y_2x_3 \end{array}$$

1. Montrer que f et g sont symétriques.
2. Déterminer la forme quadratique associé a chaque forme bilinéaire.

Exercice 5 : (Examen 209)

Soit l'application

$$\begin{array}{rcl} f: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ & ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) & \mapsto x_1y_2 + x_2y_1 - 3x_2y_2 \end{array}$$

1. Montrer que f est une forme bilinéaire symétrique.
2. Déterminer $Ann(f)$ le noyau de f. Déduire si f est non dégénérée.
3. Déterminer la matrice de f dans la base $\{\varepsilon_1 = (2,2), \varepsilon_2 = (1,3)\}$ de $\mathbb{R}^2$.
4. Soit l'ensemble
$$F =< (1,1) >$$
Déterminer $F^{\perp}$ l'orthogonal e F.

Références bibliographiques :

1. Exercices corrigés d'algèbre linéaire, **Tom 2**, 510/27.
2. Dualité, formes quadratiques, formes hermitiennes : exercices corrigés avec rappels de cours, 510/12.
3. Algèbre linéaire et bilinéaire, 510/516.
4. Algèbre et géométrie, 2 année, 510/1058.
5. Algèbre linéaire : Cours et exercices corrigés 510/24.
6. Algèbre, exercices et problèmes, 510/420.