# 2. Formes bilinéaires

Dans tout ce chapitre $E$, $F$ et $G$ sont des espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$.

## 2.1 Formes bilinéaires

**Définition 2.1.1** L'application $f : E \times F \longrightarrow G$ est dite **bilinéaire** si :

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2, y) &= f(x_1, y) + f(x_2, y) \\ f(\alpha x, y) &= \alpha f(x, y) \\ f(x, y_1 + y_2) &= f(x, y_1) + f(x, y_2) \\ f(x, \alpha y) &= \alpha f(x, y) \end{aligned}$$

$\forall\, x, x_1, x_2 \in E$, $y, y_1, y_2 \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
Si $G = \mathbb{K}$ $f$ est dite **forme bilinéaire**.

**Définition 2.1.2** L'application $f : E \times F \longrightarrow G$ est dite bilinéaire si :

**i)** Pour tout $x \in E$, ($x$ fixé), l'application,

$$\begin{aligned} f_x : \quad F &\longrightarrow G \\ y &\longmapsto f(x, y) \end{aligned}$$

est une forme linéaire sur $F$.

**ii)** Pour tout $y \in F$, ($y$ fixé), l'application,

$$\begin{aligned} f_y : \quad E &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto f(x, y) \end{aligned}$$

est une forme linéaire sur $E$.

■ **Example 2.1**

1. L'application

$$\begin{aligned} f_0 : \quad E \times F &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\longmapsto 0_{\mathbb{K}} \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire.

2. L'application
$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & xy \end{array}$$
est une forme bilinéaire.
3. Soit $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} :\ f\ continue\}$. L'application
$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})\times\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (f,g) & \longmapsto & \int_0^1 f(t)g(t)dt \end{array}$$
est une forme bilinéaire.

■

### 2.1.1 L'espace vectoriel $\mathscr{L}(E\times F,\mathbb{K})$

**Proposition 2.1.1** L'ensemble de toutes les formes bilinéaires de $E\times F$ dans $\mathbb{K}$, noté $\mathscr{L}(E\times F,\mathbb{K})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

*Démonstration.*
Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ et $f,g\in\mathscr{L}(E\times F,\mathbb{K})$

1. **a)** La forme bilinéaire
$$\begin{array}{rccl} f_0: & E\times F & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x,y) & \longmapsto & 0_{\mathbb{K}} \end{array}$$
est l'élement neutre de $\mathscr{L}(E\times F,\mathbb{K})$.

**b)** Soient $f,g$ et $f\in\mathscr{L}(E\times F,\mathbb{K})$,
$$(f+g)+h = f+(g+h),$$
donc $+$ est associatif.

**c)** Soit $f\in\mathscr{L}(E\times F,\mathbb{K})$, on a
$$\begin{array}{rccl} -f: & E\times F & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x,y) & \longmapsto & -f(x,y) \end{array}$$
est une forme bilinéaire vérifié
$$f+(-f) = 0_{\mathscr{L}(E\times F,\mathbb{K})}$$
donc $+$ est symétrisable.

**b)** Soit Soit $f,g\in\mathscr{L}(E\times F,\mathbb{K})$, on a
$$f+g = g+f$$
donc $+$ est abélien.

Par conséquent $(\mathscr{L}(E\times F,\mathbb{K}),+)$ est un groupe abilién.

2. $(\alpha\beta).g = \alpha.(\beta g)$.
3. $(\alpha+\beta).f = \alpha.f+\beta.f$.
4. $\alpha.(f+g) = \alpha.f+\alpha.g$.
5. $1_{\mathbb{K}}.f = f$.

Donc $(\mathscr{L}(E\times F,\mathbb{K})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. ■

### 2.1.2 Matrice d'une forme bilinéaire

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels de dimensions finies sur le même corps $\mathbb{K}$, $B = \{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ une base de $E$ et $B' = \{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_p\}$ une base de $F$.

**Définition 2.1.3** Soit $f \in \mathscr{L}(E \times F, \mathbb{K})$. **La matrice associée à** $f$ par rapport à $B$ et $B'$ est la matrice de type $(n,p)$ définie par

$$a_{ij} = f(e_i, \varepsilon_j) \quad \forall i = 1,2,...,n;\ j = 1,2,...,p.$$

c'est à dir

$$M = \begin{pmatrix} f(e_1,\varepsilon_1) & f(e_1,\varepsilon_2) & \dots & f(e_1,\varepsilon_p) \\ f(e_2,\varepsilon_1) & f(e_2,\varepsilon_2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f(e_n,\varepsilon_1) & f(e_n,\varepsilon_2) & \dots & f(e_n,\varepsilon_p) \end{pmatrix}$$

■ **Example 2.2**
Soit la forme bilinéire

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2)) &\longmapsto (x_1+x_2+x_3)y_1 + (x_1+x_2+x_3)y_2 \end{aligned}$$

et soit $B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,O,1)\}$ la base canonique de $R^3$ et $B' = \{\varepsilon_1 = (1,0); \varepsilon_2 = (1,1)\}$ une base de $\mathbb{R}^2$.

La matrice associée à $f$ par rapport à $B$ et $B'$ est

$$M = \begin{pmatrix} f(e_1,\varepsilon_1) & f(e_1,\varepsilon_2) \\ f(e_2,\varepsilon_1) & f(e_2,\varepsilon_2) \\ f(e_3,\varepsilon_1) & f(e_3,\varepsilon_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

■

### 2.1.3 Forme bilinéaire associée à une matrice

**Définition 2.1.4** Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^p &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (X,Y) &\longmapsto X^t M Y \end{aligned}$$

où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$
est une forme bilinéaire dite **la forme bilinéaire associée à** $M$.

■ **Example 2.3** Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

La forme bilinéaire associée à $A$ est

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x_1,x_2),(y_1,y_2,y_3)) &\longmapsto f((x_1,x_2),(y_1,y_2,y_3)) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} f((x_1,x_2),(y_1,y_2,y_3)) &= (x_1,x_2)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &= 2x_1y_1 + (3x_1 - 2x_2)y_2 + (x_1 + 4x_2)y_3. \end{aligned}$$

■

### 2.1.4 Changement de base

**Proposition 2.1.2** Soient $f \in \mathscr{L}(E \times F, \mathbb{K})$, $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base de $E$ et $B' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_p\}$ une base de $F$ et $M$ la matrice associée à $f$ par rapport à $B$ et $B'$. Soient maintenant $B_1 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$ une autre base de $E$ et $B'_1 = \{\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_p\}$ une autre base de $F$ et $N$ la matrice associée à $f$ par rapport à $B_1$ et $B'_2$. Donc

$$N =^t PMQ$$

avec
$P$ est la matrice de passage de $B$ à $B_1$.
$Q$ est la matrice de passage de $B'$ à $B'_1$.

*Démonstration.* En utilisant l'écriture matricielle par rapport aux bases $B$, $B'$ et $B_1$, $B'_1$, on aura

$$\forall (X,Y) \in E \times F : f(X,Y) =^t XMY =^t X'NY'$$

avec $X = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i \varepsilon_i$ et $Y = \sum_{i=1}^{p} y_i e'_i = \sum_{i=1}^{p} y'_i \varepsilon'_i$.
Soit $P$ la matrice de passage de $B$ à $B_1$, donc $X = PX'$
Soit $Q$ la matrice de passage de $B'$ à $B'_1$, donc $Y = QY'$. Par suite, on aura

$$\begin{aligned} {}^tXMY &= {}^t(PX')M(QY') \\ &= {}^tX'^tPMQY \\ &= {}^tX'({}^tPMQ)Y. \end{aligned}$$

Donc $\forall X' \in \mathbb{K}^n, Y' \in \mathbb{K}^p, {}^tX'NY' =^t X'({}^tPMQ)Y$. Alors $N =^t PMQ$. ■

## 2.2 Formes bilinéaires symétriques

**Définition 2.2.1** Soit $f \in \mathscr{L}(E \times E, \mathbb{K})$.

- $f$ est dite **symétrique** si
$$\forall (x,y) \in E \times E, \quad f(x,y) = f(y,x).$$
- $f$ est dite **anti-symétrique** si
$$\forall (x,y) \in E \times E, \quad f(x,y) = -f(y,x).$$
- $f$ est dite **alternée** si
$$\forall x \in E, \quad f(x,x) = 0.$$

■ **Example 2.4**

1. Soit la forme bilinéaire
$$\begin{aligned} \varphi : \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}) \times \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f,g) &\longmapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt \end{aligned}$$
Soit $f, g \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, on a
$$\begin{aligned} \varphi(g,f) &= \int_0^1 g(t)f(t)dt \\ &= \int_0^1 f(t)g(t)dt \\ &= \varphi(f,g). \end{aligned}$$

Donc $\varphi$ est symétrique.

2. Soit la forme bilinéaire

$$\begin{array}{rcl} f: & \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) & \longmapsto x_1y_2 - x_2y_1 \end{array}$$

Soit $(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} f((y_1,y_2),(x_1,x_2)) &= y_1x_2 - y_2x_1 \\ &= -(x_1y_2 - x_2y_1) \\ &= -f((x_1,x_2),(y_1,y_2)). \end{aligned}$$

Donc $f$ est anti-symétrique. D'autre part on a

$$f((x_1,x_2),(x_1,x_2)) = x_1x_2 - x_2x_1 = 0.$$

Donc $f$ est alternée.

■

**Proposition 2.2.1**

**i)** L'ensemble des formes bilinéaires symétriques, noté $\mathscr{S}(E\times E,\mathbb{K})$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{L}(E\times E,\mathbb{K})$.

**ii)** L'ensemble des formes bilinéaires anti-symétriques, noté $\mathscr{A}(E\times E,\mathbb{K})$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{L}(E\times E,\mathbb{K})$.

*Démonstration.*

**i) a)** On a $f_0(x,y) = f_0(y,x) = O_{\mathbb{K}}$ donc

$$f_0 \in \mathscr{S}(E\times E,\mathbb{K}). \tag{2.1}$$

**b)** Soients $f,g\in\mathscr{S}(E\times E,\mathbb{K})$ et $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$

$$\begin{aligned} (\alpha f+\beta g)(x,y) &= \alpha f(x,y)+\beta g(x,y) \\ &= \alpha f(y,x)+\beta g(y,x) \\ &= (\alpha f+\beta g)(y,x). \end{aligned}$$

Donc

$$\alpha.f+\beta.g \in \mathscr{S}(E\times E,\mathbb{K}) \tag{2.2}$$

De (2.1) et (2.2) $\mathscr{S}(E\times E,\mathbb{K})$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{L}(E\times E,\mathbb{K})$.

**ii) a)** On a $f_0(x,y) = -f_0(y,x) = O_{\mathbb{K}}$ donc

$$f_0 \in \mathscr{A}(E\times E,\mathbb{K}). \tag{2.3}$$

**b)** Soients $f,g\in\mathscr{A}(E\times E,\mathbb{K})$ et $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$

$$\begin{aligned} (\alpha f+\beta g)(x,y) &= \alpha f(x,y)+\beta g(x,y) \\ &= -\alpha f(y,x)-\beta g(y,x) \\ &= -(\alpha f+\beta g)(y,x). \end{aligned}$$

Donc

$$\alpha.f+\beta.g \in \mathscr{A}(E\times E,\mathbb{K}) \tag{2.4}$$

De (2.3) et (2.4) $\mathscr{A}(E\times E,\mathbb{K})$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{L}(E\times E,\mathbb{K})$.

■

**Proposition 2.2.2** On a

$$\mathscr{L}(E\times E,\mathbb{K})=\mathscr{S}(E\times E,\mathbb{K})\oplus\mathscr{A}(E\times E,\mathbb{K}).$$

*Démonstration.*

**i)** Soit $f\in\mathscr{S}(E\times E,\mathbb{K})\cap\mathscr{A}(E\times E,\mathbb{K})$ donc

$$f(x,y)=f(y,x),\quad \forall x,y\in E$$

$$f(x,y)=-f(y,x),\quad \forall x,y\in E$$

D'où $f(x,y)=0,\quad \forall x,y\in E$, par conséquent

$$\mathscr{S}(E\times E,\mathbb{K})\cap\mathscr{A}(E\times E,\mathbb{K})=\{0_E\} \tag{2.5}$$

**ii)** On a

$$\mathscr{S}(E\times E,\mathbb{K})+\mathscr{A}(E\times E,\mathbb{K})\subset\mathscr{L}(E\times E,\mathbb{K}).$$

D'autre part, soit $f\in\mathscr{L}(E\times E,\mathbb{K})$,

$$f(x,y)=\underbrace{\frac{1}{2}(f(x,y)+f(y,x))}_{f_1(x,y)}+\underbrace{\frac{1}{2}(f(x,y)-f(y,x))}_{f_2(x,y)}$$

on a $f_1\in\mathscr{S}(E\times E,\mathbb{K})$ et $f_2\in\mathscr{A}(E\times E,\mathbb{K})$, Donc

$$\mathscr{L}(E\times E,\mathbb{K})\subset\mathscr{S}(E\times E,\mathbb{K})+\mathscr{A}(E\times E,\mathbb{K})$$

D'où

$$\mathscr{L}(E\times E,\mathbb{K})=\mathscr{S}(E\times E,\mathbb{K})+\mathscr{A}(E\times E,\mathbb{K}) \tag{2.6}$$

De (2.5) et (2.6) on aura

$$\mathscr{L}(E\times E,\mathbb{K})=\mathscr{S}(E\times E,\mathbb{K})\oplus\mathscr{A}(E\times E,\mathbb{K}).$$

■

### 2.2.1 Noyau d'une formes bilinéaire symétrique

**Définition 2.2.2** Soit $f\in\mathscr{L}(E\times E,\mathbb{K})$. **Le noyau** de $f$, noté $Ann(f)$, est définie par

$$\begin{aligned} Ann(f) &= \{x\in E,\forall y\in E:\quad f(x,y)=0\},\\ &= \{y\in E,\forall x\in E:\quad f(x,y)=0\}. \end{aligned}$$

### 2.2.2 Formes bilinéaires symétriques non dégénérées

**Définition 2.2.3** Soit $f\in\mathscr{L}(E\times E,\mathbb{K})$. $f$ est dite **non dégénérées** si $Ann(f)=\{0_E\}$.

■ **Example 2.5**

1. Soit la forme bilinéaire symétrique

$$\begin{aligned} f:\quad \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}\\ ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) &\longmapsto x_1y_1+x_2y_2 \end{aligned}$$

On a

$$Ann(f)=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\forall(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2:\quad f((x_1,x_2),(y_1,y_2))=0\},$$

On a

$$f((x_1,x_2),(y_1,y_2))=0\quad \forall(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$$

- Pour $(y_1, y_2) = (1,0)$ on obtient $x_1 = 0$.
- Pour $(y_1, y_2) = (0,1)$ on obtient $x_2 = 0$.

Donc
$$Ann(f) = \{(0,0)\}$$
Par conséquent $f$ est non dégénérée.

2. Soit la forme bilinéaire symétrique
$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) & \longmapsto & (x_1+x_2)(y_1+y_2) \end{array}$$
On a
$$Ann(g) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, \forall (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 : \quad g((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 0\},$$
On a
$$g((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 0 \quad \forall (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$$
- Pour $(y_1,y_2) \neq (0,0)$ on obtient $x_1 = -x_2$.

Donc
$$Ann(g) = \{(x_1,-x_1), x_1 \in \mathbb{R}\} = <(1,-1)> .$$
On a $Ann(g) \neq \{(0,0)\}$ Par conséquent $g$ est dégénérée.

■

**Proposition 2.2.3** Soit $f \in \mathscr{L}(E \times E, \mathbb{K})$. On considère l'application $\Phi : E \to E^*$ définie par :
$$\forall y \in E, \Phi(y) = \varphi_y, o\ \forall x \in E, \varphi_y(x) = f(x,y).$$
Alors $\Phi$ est injective si et seulement si $f$ est non dégénérée.

*Démonstration.* On a $\Phi$ est linéaire et
$$\begin{aligned} Kerf &= \{x \in E, \quad \Phi(x) = 0\} \\ &= \{x \in E, \quad \varphi_y(x) = 0, \forall y \in E\} \\ &= \{x \in E, \quad f(x,y) = 0, \forall y \in E\} = Ann(f). \end{aligned}$$
On a $\Phi$ est injective donc $ker\Phi = \{0_E\} = Ann(f)$, par conséquent $f$ est non dégénérée. ■

**Corollaire 2.2.4** Soient $f \in \mathscr{L}(E \times E, \mathbb{K})$, $E$ de dimension finie et $B$ une base de $E$ et $A$ la matrice de $f$ par rapport à la base $B$/ Alors
$$\texttt{f est non dégénérée} \Leftrightarrow det(A) \neq 0.$$

*Démonstration.* considérons l'application $\Phi : E \to E^*$ définie par :
$$\forall y \in E, \Phi(y) = \varphi_y, o\ \forall x \in E, \varphi_y(x) = f(x,y).$$
Posons $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de E, et $B^* = \{e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*\}$ la base duale de $B$.
Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i;j \leq n}$ la matrice de $\phi$ par rapport aux bases $B$ et $B^*$, alors on a
$$\forall j = 1,2,\dots,n; \Phi(e_j) = \sum_{k=1}^{n} m_{kj} e_k^*$$
Donc pour chaque $i \in \{1,2,\dots,n\}$ et $j \in \{1,2,\dots,n\}$, on a
$$f(e_i,e_j) = \Phi(e_i)(e_j) = \sum_{k=1}^{n} m_{kj} e_k^*(e_i) = m_{ij}, \quad car\ e_k^*(e_i) = \delta_{ik}.$$

On en déduit donc que $M = A$. Ainsi, on aura,

$$\begin{aligned} f\ est\ non\ dgnre &\Leftrightarrow \Phi\ est\ injective\ (Proposition(2.2.3)) \\ &\Leftrightarrow \Phi\ est\ bejective\ (car\ dimE = dimE^*) \\ &\Leftrightarrow det(M) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow det(A) \neq 0 (car\ M = A). \end{aligned}$$

■

## 2.3 Orthogonalité

**Définition 2.3.1** Soit $f \in \mathscr{L}(E \times E, \mathbb{K})$.
On dit que deux vecteurs $x$ et $y$ de $E$ sont **orthogonaux**, si $f(x,y) = 0$.

**Définition 2.3.2** Soient $f \in \mathscr{L}(E \times E, \mathbb{K})$ et $A$ une partie non vide de $E$. On définit l'**orthogonale** de $A$, par rapport à la forme bilinéaire $f$, noté $A^\perp$, par

$$A^\perp = \{x \in E : \quad f(x,y) = 0, \forall y \in A\}.$$

■ **Example 2.6** Soit $f \in \mathscr{L}(E \times E, \mathbb{K})$.

1. $$E^\perp = \{x \in E : \quad f(x,y) = 0, \forall y \in E\} = Ann(f).$$
2. $$\{0_E\}^\perp = \{x \in E : \quad f(x,0) = 0\} = E.$$

■

### 2.3.1 Bases orthogonales

**Définition 2.3.3** Soient $f \in \mathscr{L}(E \times E, \mathbb{K})$ et $E$ de dimznsion finie. On dit que une base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ est **orthogonale** si

$$f(e_i, e_j) = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j.$$