Université Abdelhafid Boussouf - Mila $2022 - 2023$
Institut des Sciences et de la Technologie
Département des Mathématiques et informatique **Algèbre** 2

Série no 2 : Applications linéaires

Exercice 1. *soit*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P - XP' \end{array}$$

1. Montrer que est une application linéaire.
2. Déterminer son noyau et son image.

Exercice 2. *Pour tout réel m, soit l'application* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ *définie par :*

$$f(x, y, z) = (x - y + z, mx - 2y + mz, -x + y, -mx + my - mz)$$

1. *Montrer que f est linéaire.*
2. *Déterminer une base du noyau de f. Pour quelle valeur de m l'application f est-elle injective ? f est-elle bijective ?*
3. *Déterminer une base de l'image de f.*

Exercice 3. *Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la donnée des images des vecteurs de la base :*

$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3, \quad u(e_2) = 3e_2, \quad u(e_3) = -4e_1 + 4e_3.$$

1. *Déterminer une base de $\ker u$. u est-il injectif ? peut-il être surjectif ? Pourquoi ?*
2. *Déterminer une base de $\operatorname{Im} u$. Quel est le rang de u ?*
3. *Montrer que $E = \ker u \oplus \operatorname{Im} u$.*

Exercice 4. *Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u = (1, 0, 0)$ et $v = (1, 1, 1)$. Trouver un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont le noyau est E.*

Exercice 5. *Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Démontrer que*

$$g \circ f = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Im}(f) \subset \ker(g).$$

Exercice 6. *(Supplémentaire)*
Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *une application linéaire telle que :*

$$(1,2,0) \in \mathrm{Ker}(f), \quad f(0,0,1) = (1,0), \quad f(0,t,0) = (t,t)\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

1. *Déterminer* $f(x,y,z)$.
2. *Trouver une base et la dimension du* $\mathrm{Ker}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$.
3. *Trouver l'ensemble des vecteurs dont l'image est le vecteur* $(0,1)$. *Est - il un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *?*

Exercice 7. *(Supplémentaire)*
On considère $\mathbb{C}$ *comme un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel. On définit l'application* f *par*

$$f : z \longmapsto iz - i\overline{z}.$$

1. *Montrer que* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$.
2. *Déterminer* $\mathrm{Ker}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$.
3. *Déterminer* f^2.
4. *En déduire que l'endomorphisme* $id_{\mathbb{C}} + 2f$ *est inversible et calculer son inverse.*