Solution de la serie 2
2020-2021
L'espace dual

1 Exo 1

$1 \Rightarrow 2$: A fermé, $D(A) = F$, et E, F e de Banach, donc $G(A)$ fermé, d'où A continu donc borné (th grph ferme)

$2 \Rightarrow 1$: borné donc continu

et A fermé $\Leftrightarrow D(A)$ fermé (th), donc $D(A) = \overline{D(A)}$

$2 \Rightarrow 3$: $\overline{D(A)} = E$, donc A^*existe, et $D(A^*) \subset F'$

d'autre part, Soit $y \in F'$. $\forall x \in D(A) : \langle y, Ax \rangle \leq \|y\| \|Ax\| \leq \|y\| \|A\| \|x\|$ (A borné)

donc, $\langle y, Ax \rangle \leq C \|x\|$, d'où $y \in D(A^*)$

$3 \Rightarrow 4$: $D(A^*) = F' \Rightarrow \overline{D(A^*)} = F'$

comme A^*est fermé, donc $G(A^*)$ fermé d'où A^*continu

$4 \Rightarrow 2$: $\forall y \in D(A^*), \forall x \in D(A), \langle y, Ax \rangle = \langle A^* y, x \rangle$

Comme: $\forall x \in E : \|x\| = \sup\limits_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} \langle f, x \rangle$, (corollaire3 P1)

et $Ax \in F$

alors $\|Ax\| = \sup\limits_{\substack{y \in E' \\ \|y\| \leq 1}} |\langle y, Ax \rangle| = \sup\limits_{\substack{y \in E' \\ \|y\| \neq 0}} \frac{|\langle y, Ax \rangle|}{\|y\|} = \sup\limits_{\substack{y \in E' \\ \|y\| \neq 0}} \frac{|\langle A^* y, x \rangle|}{\|y\|} \leq \frac{\|A^*\| \|y\| \|x\|}{\|y\|}$

d'où, A est borné et $\|A\| \leq \|A^*\| \ldots (1)$

- Inversement, $A^* y \in E'$ et $\|A^* y\| = \sup\limits_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} |\langle A^* y, x \rangle| = \sup\limits_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} |\langle y, Ax \rangle| = \sup\limits_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} \frac{|\langle y, Ax \rangle|}{\|x\|} \leq \|y\| \|A\|$

d'où $\|A^*\| \leq \|A\| \ldots (2)$

de (1) et (2) on a l'égalité.

2 Exo 2

a) Supposons que A^{-1}existe et que $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$. Donc, $(A^{-1})^* \in \mathcal{L}(E', F')$.

Mais si $\overline{D(A)} = E$, alors A^* existe et $A^* : D(A^*) \subset F' \to E'$

On a: $\forall f \in E', \forall x \in D(A)$:

$\langle f, x \rangle = \langle f, A^{-1} A x \rangle = \left\langle (A^{-1})^* f, Ax \right\rangle = \left\langle A^* (A^{-1})^* f, x \right\rangle$

donc, $\Im_d = A^* (A^{-1})^*$......(1)

De plus, $\forall g \in D(A^*), \forall v \in F$:

$\langle g, v \rangle = \langle g, A A^{-1} v \rangle = \langle A^* g, A^{-1} v \rangle = \left\langle (A^{-1})^* A^* g, v \right\rangle$

d'où:$(A^{-1})^* A^* = \Im_d$.......(2)

b) de (1) et (2) on déduit que $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$ et que A^* est inversible

comme $(A^{-1})^* \in \mathcal{L}(E', F')$,on déduit que $(A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(E', F')$.

c) Supposons que $(A^*)^{-1}$ existe (*donc*, $N(A^*) = \{0\}$) et que $(A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(E', F')$

(donc $A^* \in \mathcal{L}(F', E')$)

$\forall f \in E'$, $\forall u \in D(A) : \left\langle (A^*)^{-1} f, Au \right\rangle = \left\langle A^* (A^*)^{-1} f, u \right\rangle = \langle f, u \rangle$

D'aprés le th de Hann-Banach:(corollaire)

$\forall u \in D(A)$, $\exists f \in E' : \langle f, u \rangle = \|u\|$ et $\|f\| = 1$, $u \neq 0$(corollaire P12)

$\|u\| = \langle f, u \rangle = \left\langle (A^*)^{-1} f, Au \right\rangle \leq \left\| (A^*)^{-1} f \right\| \|Au\| \leq \left\| (A^*)^{-1} \right\| \|Au\|$($\left\| (A^*)^{-1} \right\|$constante)

d'où A^{-1} est borné (continu), donc $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$

Par conséquent A^{-1} est fermé.

Comme A^{-1} est continu donc $D(A^{-1})$ est fermé,

Or $D(A^{-1}) = R(A) = N(A^*)^{\perp}$ (car $(A^*)^{-1}$ existe)

$= \{0\}^{\perp} = F$

donc $D\left(A^{-1}\right)=R\left(A\right)=F$
Par conséquent $A^{-1}\in\mathcal{L}\left(F,E\right).$

2.1 Exo 3

$C\left([0,1]\right)$ espace des fonctions continues de $[(0,1)]\rightarrow\mathbb{R}$

$\|f\|_{\infty}=\underset{x\in\|0,1\|}{sup}\left|f\left(x\right)\right|$
$B=\{f\in C\left([0,1]\right):f\left(x\right)>0,\ \forall x\in[0,1]\}$
1) B convexe?
On a:$\forall\alpha\in[0,1],\forall f,g\in B:(\alpha f+(1-\alpha)\,g)x>0,\forall x\in[0,1]$.Donc B est convexe.
B ouvert?
$\forall f\in B,\exists r>0:B\left(f,r\right)\subset B$?
Soit $f\in B$. Comme f est continue sur $[0,1]$ et $[0,1]$ compact dans $\mathbb{R}$, alors
il existe $\delta>0:f\left(x\right)\geq\delta>0,\ \forall x\in[0,1]$.
donc, $f\left(x\right)\geq\delta>\frac{\delta}{2}>0,\ \forall x\in[0,1]$.
On prend $r=\frac{\delta}{2}$, et on montre que $B(f,\frac{\delta}{2})\subset B$:
Soit $g\in B(f,\frac{\delta}{2})$, donc, $\|f-g\|_{\infty}<\frac{\delta}{2}\qquad(-\|f-g\|_{\infty}>-\frac{\delta}{2})$
Comme $\|f-g\|_{\infty}=\underset{x\in\|0,1\|}{sup}\left|(f-g)(x)\right|$
donc, $f\left(x\right)-g\left(x\right)\leq\|f-g\|_{\infty}$
$-g\left(x\right)\leq-f\left(x\right)+\|f-g\|_{\infty}$
$\Longrightarrow g\left(x\right)\geq f\left(x\right)-\|f-g\|_{\infty}$
$\Longrightarrow g\left(x\right)\geq\delta-\frac{\delta}{2}=\frac{\delta}{2}>0.$
donc g appartient à B. Par conséquent B est ouvert.
2) $C=\{g\in C\left([0,1]\right):g\left(\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{n},\ \forall n\in\mathbb{N}^{*}\}$
exemple: $g\left(x\right)=-x$.
$a\backslash$ C est convexe car: $\forall h,g\in C$, $0\leq\alpha\leq1$,
Si: $h\left(\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{n}$ et $g\left(\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{n}$,
Alors: $\left(\alpha h+\left(1-\alpha\right)g\right)\left(\frac{1}{n}\right)=-\frac{\alpha}{n}-\left(1-\alpha\right)\frac{1}{n}=-\frac{1}{n}$
d'où C est convexe.
$b\backslash$ $C\neq\varnothing$ car $g\left(x\right)=-x$ appartient à C.
$c\backslash$ $C\cap B=\varnothing$, en effet, supposons qu'il existe un èlèment $h\in C\cap B$
donc $\forall x\in[0,1]:h\left(x\right)\geq0$ et $h\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x}$: contradiction. donc $C\cap B=\varnothing$.
$d\backslash B\neq0$ car $f=1$ appartient à B $(\forall x\in[0,1]:f\left(x\right)=1>0)$
$e\backslash$ $C\in C\left([0,1]\right)$, $B\in C\left([0,1]\right)$ (deux variétés linéaires)
Comme B et C sont deux convexes, non vides et disjoints
B ouvert donc le th de Hann-Banach (1 ere forme géométrique) il existe un hyperplan(forme linéaire) $\varphi=a$ telle $\varphi\left(f\right)\geq a\geq\varphi\left(g\right)$ (qui sépare B et C au sens large pour toute $f\in B$ et toute $g\in C$).
3) $\varphi\left(f\right)\geq0$, $\forall f\in B$?
Par l'absurde: supposons que : $\exists f\in B$ telle que $\varphi\left(f\right)<0$
Alors $\forall\lambda>0,\forall x\in[0,1]:\lambda f\left(x\right)>0$, (car $f\in B$).
$\Longrightarrow\lambda f\in B$
$\Longrightarrow\varphi\left(\lambda f\right)=\lambda\varphi\left(f\right)\geq a$
$\Longrightarrow\lim\limits_{\lambda\rightarrow+\infty}\lambda\varphi\left(f\right)=-\infty(\geq a)$ contradiction
donc $\varphi\left(f\right)\geq0$, $\forall f\in B$.

2.2 Exo 5

E un espace vectoriel normé, M un sous espace vectoriel de E, $x_0\notin M$ se trouve à une distance d de M tel que $d=\inf\limits_{x\in M}\|x-x_0\|>0.$

existe-t- une forme lineaire f definie sur E tout entier telle que: $\langle f,x\rangle=0,\ \forall x\in M$?

Il nous faut une application linéaire g nulle sur M telle que le prolongement f est nul aussi sur M et qui prend la valeur 1 au point x_0 $(x_0 \notin M)$. On doit donc trouver le s-e-v $F \subset E$, où f est définie.$(i; e : M \subseteq F)$

On prend: $F = M + \mathbb{R}x_0$

$y \in F \Leftrightarrow y = x + tx_0$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in M$

On définit g comme suit: $< g, y >= t$; Il est clair que g est linéaire et $\underset{y \to < g,y >= t}{g : F \to \mathbb{R}}$

Calculons la norme de g :

$$|< g, y >| = |t| = \frac{|t| \, \|y\|}{\|y\|} = \frac{|t| \, \|y\|}{\|x + tx_0\|} = \frac{|t| \, \|y\|}{|t| \left\| \frac{x}{t} + x_0 \right\|} = \frac{\|y\|}{\left\| x_0 - \left(-\frac{x}{t}\right) \right\|}$$

$x \in M \Rightarrow -\frac{x}{t} \in M \Rightarrow d = \inf\limits_{x \in M} \|x - x_0\| \leq \left\| -\frac{x}{t} - x_0 \right\| = \left\| x_0 - \left(-\frac{x}{t}\right) \right\|$

$\left\| x_0 - \left(-\frac{x}{t}\right) \right\| \geq d, \Rightarrow |< g, y >| \leq \frac{\|y\|}{d}$

Or $|< g, y >| \leq \|g\| \, \|y\|$, donc, $\|y\| \neq 0$: $\frac{|< g,y >|}{\|y\|} \leq \frac{1}{d}$, Par conséquent, $\underset{\|y\| \neq 0}{Sup} \frac{|< g,y >|}{\|y\|} \leq \frac{1}{d}$, donc g est continue, et $\|g\|_{F'} \leq \frac{1}{d}$............(1),

Donc d'aprés le corollaire 2: " E un K-e-v normé. G un s-e-v de E. $g : G \to \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} g \text{ app. lin. cont} \\ \|g\| = \sup\limits_{\substack{x \in G \\ \|x\| \leq 1}} g(x) \end{array} \right\} \textit{alors} \text{ il existe } f \in E' \text{ qui prolonge } g \text{ telle que } \|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$$

Donc il existe $f \in E'$ qui prolonge g telle que $\|f\|_{E'} = \|g\|_{F'}$

i,e; $f(x) = g(x), \forall x \in F$. f s'annule sur M?

si $y \in M$ $(y = x + tx_0, t \in \mathbb{R}, x \in M)$ alors, $t = 0$,donc $y = x$

Comme $f'x) = g(x), \forall x \in F$, et $M \subset F$, donc, $f'x) = g(x), \forall x \in M$

et comme $y = x$,donc, $f(x) = g(y) =< g, y >= t = 0$

donc $f(x) = 0$, $\forall x \in M$ et donc il existe $f \in E'$, $< f, x >= 0 \quad \forall x \in M$.

2- Si $y = x_0$ donc $t = 1$

et donc $g(y) = g(x_0) = t = 1$

d'où $f(x_0) = g(x_0) = 1$

donc: $< f, x_0 >= 1$

2- $\|f\| = \frac{1}{d}$?

De 1°, on a: $\|f\|_{E'} = \|g\|_{F'} \leq \frac{1}{d}$

$\|f\|_{E'} \geq \frac{1}{d}$?

$\exists (x_n)_n \in M$, telle que: $\underset{n \to \infty}{lim} \|x_n - x_0\| = \frac{1}{d}$