Centre universitaire Abdelhafid Boussouf-Mila

Institut des Sciences et Technologie
Département de Mathématiques et Informatique
L3 Mathématiques 2022-2023
Matière: **Introduction à la théorie des opérateurs linéaires**

Serie 2: L'espace dual

Exercice1: E et F deux espaces de Banach. Soit A un opérateur linéaire fermé tel que:

$A : D(A) \subset E \to F$ et $\overline{D(A)} = E$.
Montrer que les propriétés suivantes sont equivalentes:
1-$D(A) = E$
2- A borné.
3- $D(A^*) = F'$.
4- $\overline{D(A^*)} = F'$ et A^* borné; et dans ces conditions $\|A\| = \|A^*\|$.

Exercice2: Soient E et F deux espaces réels de Banach.
$A : E \to F$, avec $\overline{D(A)} = E$.
Montrer que:
a- Si A^{-1} existe et appartient à $\mathcal{L}(F, E)$, alors $(A^*)^{-1}$ existe et appartient à $\mathcal{L}(E', F')$.
b- Déduire que $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.
c- Si $(A^*)^{-1}$ existe et appartient à $\mathcal{L}(E', F')$, alors A^{-1} existe et appartient à $\mathcal{L}(F, E)$.

Exercice3: Soit $C([0;1])$ l'espace des fonctions continues $f : [0;1] \to \mathbb{R}$, muni de la norme uniforme.
1- Montrer que $B = \{f \in C([0;1]) : f(x) > 0, \forall x \in [0,1]\}$ est un ouvert convexe de $C([0;1])$.
Soit $C = \left\{g \in C([0;1]) : g(\frac{1}{n}) = -\frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
2- Montrer qu'il existe une forme linéaire continue Φ sur $C([0;1])$ et un nombre réel $a \in \mathbb{R}$ tels que: $\Phi(f) \geq a \geq \Phi(g)$ pour toute $f \in B$ et toute $g \in C$.
3- Montrer que $\Phi(f) \geq 0$ pour toute $f \in B$ (raisonner par l'absurde et remarquer que: si $f \in B$ alors $\lambda f \in B$ pour tout $\lambda > 0$).

Exercice4: Soit E un espace vectoriel normé. M un sous espace vectoriel de E et soit $x_0 \notin M$. On suppose que $d = d(x_0, M) > 0$.
1- Montrer qu'il existe une forme linéaire f définie sur E tout entier telle que
$\langle f, x\rangle = 0, \ \forall x \in M$.
$\langle f, x_0\rangle = 1$.
$\|f\|_{E'} = \frac{1}{d}$.

Exercice5: Soit H un espace de Hilbert, et F un sous-espace fermé de H non réduit à $\{0\}$. On note P la projection orthogonale de H sur F. Si x est un élément de H on appelle distance de x à F la quantité: $d(x, F) = \inf\{\|x - y\|; y \in F\}$
1- On pose $x = P(x) + x_1$, où x_1 est orthogonal à F. Vérifier que $d(x, F) = \|x - P(x)\|$.
2- Prouver que: $\langle x_1, x_1\rangle = d(x, F)^2$, puis que $\left\langle x, \frac{x_1}{\|x_1\|}\right\rangle = d(x, F)$.
3- Soit $y \in F^{\perp}$, avec $\|y\| = 1$.Prouver que $|\langle x, y\rangle| \leq \|x_1\|$.