Centre Universitaire Abdelhafid BOUSSOUF - Mila
Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Génie civil et de l'hydraulique
1er Année Mastère Structure

Année universitaire : 2022/2023
Matière : Méthode des éléments finis

# Corrigé de la serie 03

**Solution d'exercice N°01:**

**Calcule élémentaires :**

**Elément 1 :( nœuds 1-2)**

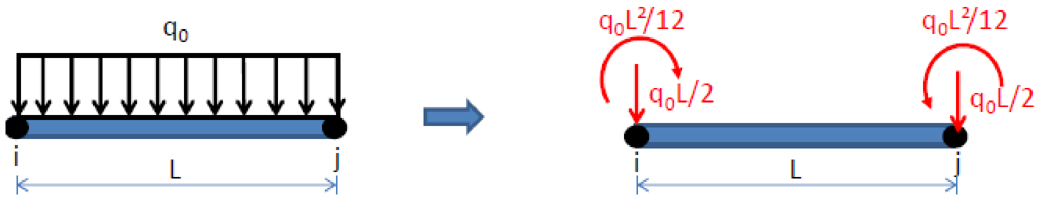
**Matrice de rigidité :**

$$[K_1] = \frac{E.I_z}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & -6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

**Vecteur des forces :**

$$\{F\} = \int_0^L [N_i]^T \, Q(x)dx$$

Avec
[Ni] : est le vecteur des fonctions de forme
Q(x) : le chargement de la poutre




$$\begin{Bmatrix} T_i \\ M_i \\ T_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_0^L (2x^3 - 3Lx^2 + L^3)/L^3\,(-q_0)dx \\ \int_0^L (x^3 - 2Lx^2 + L^2x)/L^2\,(-q_0)dx \\ \int_0^L -(2x^3 - 3Lx^2)/L^3\,(-q_0)dx \\ \int_0^L (x^3 - Lx^2)/L^2\,(-q_0)dx \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{Bmatrix} T_i \\ M_i \\ T_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -q_0\dfrac{L}{2} \\ -q_0\dfrac{L^2}{12} \\ -q_0\dfrac{L}{2} \\ q_0\dfrac{L^2}{12} \end{Bmatrix}}$$

$$\{F_1\} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ M_1 \\ T_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -q_0 \dfrac{l}{2} \\ -q_0 \dfrac{l^2}{12} \\ -q_0 \dfrac{l}{2} \\ q_0 \dfrac{l^2}{12} \end{Bmatrix}$$

**<u>Elément 2 :</u>( nœuds 2-3)**

**<u>Matrice de rigidité :</u>**

$$[\boldsymbol{K_2}] = \frac{\boldsymbol{E.I_z}}{\boldsymbol{l^3}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{12} & \boldsymbol{6l} & \boldsymbol{-12} & \boldsymbol{-6l} \\ \boldsymbol{6l} & \boldsymbol{4l^2} & \boldsymbol{-6l} & \boldsymbol{2l^2} \\ \boldsymbol{-12} & \boldsymbol{-6l} & \boldsymbol{12} & \boldsymbol{-6l} \\ \boldsymbol{6l} & \boldsymbol{2l^2} & \boldsymbol{-6l} & \boldsymbol{4l^2} \end{bmatrix}$$

**<u>Vecteur des forces :</u>**

$$\{F_2\} = \begin{Bmatrix} T_2 \\ M_2 \\ T_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -q_0 \dfrac{l}{2} \\ -q_0 \dfrac{l^2}{12} \\ -q_0 \dfrac{l}{2} \\ q_0 \dfrac{l^2}{12} \end{Bmatrix}$$

**<u>Assemblage :</u>**

**Le système matriciel devient**

$$\cdot \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l & 0 & 0 \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6l & 24 & 0 & -12 & 6l \\ 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6l & 12 & -6l \\ 0 & 0 & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -q_0 \dfrac{l}{2} \\ -q_0 \dfrac{l^2}{12} \\ -q_0 l \\ 0 \\ -q_0 \dfrac{l}{2} \\ q_0 \dfrac{l^2}{12} \end{Bmatrix}$$

**Application des conditions aux limites : $\mathbf{v_1 = \theta_1 = v_2 = 0}$, le système matriciel devienne :**

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 \\ 0 & 0 & 0 & -6l & 12 & -6l \\ 0 & 0 & 0 & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -q_0 \dfrac{l}{2} \\ q_0 \dfrac{l^2}{12} \end{Bmatrix} \Rightarrow \cdot \begin{bmatrix} 8l^2 & -6l & 2l^2 \\ -6l & 12 & -6l \\ 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -q_0 \dfrac{l}{2} \\ q_0 \dfrac{l^2}{12} \end{Bmatrix}$$

d'ou :

$$\boldsymbol{\theta_2 = -\frac{5}{48}\frac{q_0 l^3}{EI_z}} \quad , \quad \boldsymbol{v_3 = -\frac{11}{48}\frac{q_0 l^4}{EI_z}} \quad , \quad \boldsymbol{\theta_3 = -\frac{13}{48}\frac{q_0 l^3}{EI_z}}$$

Les actions de liaison sont les solutions de :

$$\cdot\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l & 0 & 0 \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6l & 24 & 0 & -12 & 6l \\ 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6l & 12 & -6l \\ 0 & 0 & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{1y} \\ M_{1z} \\ R_{2y} \\ M_{2z} \\ R_{3y} \\ M_{3z} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -q_0\frac{l}{2} \\ -q_0\frac{l^2}{12} \\ -q_0 l \\ 0 \\ -q_0\frac{l}{2} \\ q_0\frac{l^2}{12} \end{Bmatrix}$$

d'ou :

$$\boldsymbol{R_{1y} = -\frac{1}{8}q_0 l} \quad , \quad \boldsymbol{M_{1z} = -\frac{1}{8}q_0 l^2} \quad , \quad \boldsymbol{R_{2y} = \frac{17}{8}q_0 l}$$

L'équilibre de la poutre est vérifie :

$$\boldsymbol{F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} - 2q_0 l = -\frac{1}{8}q_0 l + \frac{17}{8}q_0 l + 0 - 2q_0 l = 0}$$

$$\boldsymbol{M_{1z} + M_{2z} + M_{3z} + l.F_{2y} + 2l.F_{3y} - 2q_0 l^2 = -\frac{1}{8}q_0 l^2 + 0 + 0 + \frac{17}{8}q_0 l^2 + 0 - 2q_0 l^2 = 0}$$

**Solution d'exercice n°02**

**Calcule élémentaires :**

**Elément 1 :( nœuds 1-2)**

**Matrice de rigidité :**

$$[\boldsymbol{K_1}] = \frac{G.J}{2l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

**Vecteur des forces :**

$$\{F_1\} = ml\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

**Elément 2 :( nœuds 2-3)**

**Matrice de rigidité :**

$$[\boldsymbol{K_2}] = \frac{G.J}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

**Vecteur des forces :**

$$\{F_2\} = ml\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

**Assemblage :**

**Le système matriciel devient**

$$\frac{G.J}{l}\cdot\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = ml\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

**Application des conditions aux limites : $\theta_1 = \theta_3 = 0$, le système matriciel devienne :**

$$\cdot\frac{G.J}{l}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = ml\begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

d'ou :

$$\boldsymbol{\theta_2 = \frac{4}{3}\frac{ml^2}{GJ}}$$

Les actions de liaison sont les solutions de :

$$\frac{G.J}{l}\cdot\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ \theta_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = ml\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \frac{G.J}{l}\cdot\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}\{\theta_2\} = \begin{Bmatrix} M_{1x} + ml \\ M_{2x} \end{Bmatrix}$$

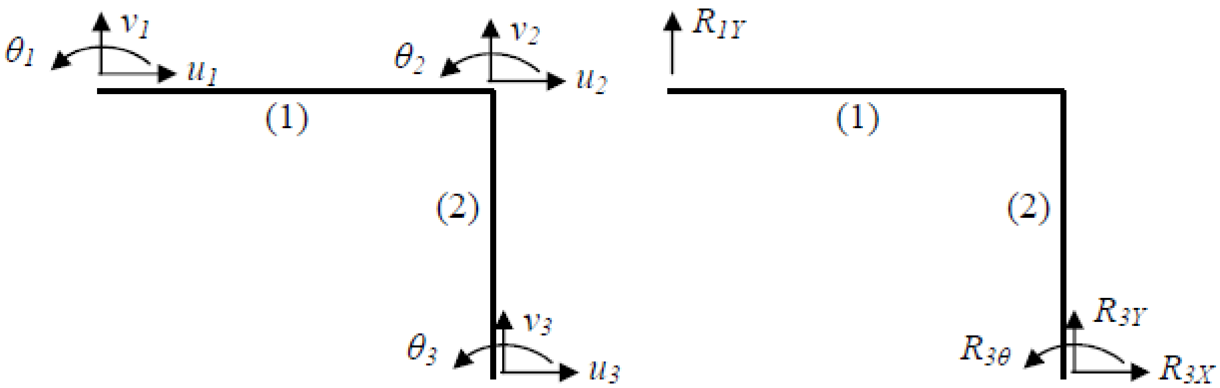
d'ou :

$$\boldsymbol{M_{1x} = -\frac{5}{3}ml} \qquad , \qquad \boldsymbol{M_{3x} = -\frac{4}{3}ml}$$

L'équilibre de la poutre est vérifie :

$$\boldsymbol{M_{1x} + M_{2x} + M_{3x} + 2ml = -\frac{5}{3}ml + ml - \frac{4}{3}ml + 2ml = 0}$$

**Solution d’exercice 03 :**




| $u_1$ | $v_1$ | $\theta_1$ | $u_2$ | $v_2$ | $\theta_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $(c^2\frac{EA}{L}+s^2\frac{12EI}{L^3})$ | $sc(\frac{EA}{L}-\frac{12EI}{L^3})$ | $-s\frac{6EI}{L^2}$ | $-(c^2\frac{EA}{L}+s^2\frac{12EI}{L^3})$ | $-sc(\frac{EA}{L}-\frac{12EI}{L^3})$ | $-s\frac{6EI}{L^2}$ | $u_1$ |
| $sc(\frac{EA}{L}-\frac{12EI}{L^3})$ | $(s^2\frac{EA}{L}+c^2\frac{12EI}{L^3})$ | $c\frac{6EI}{L^2}$ | $-sc(\frac{EA}{L}-\frac{12EI}{L^3})$ | $-(s^2\frac{EA}{L}+c^2\frac{12EI}{L^3})$ | $c\frac{6EI}{L^2}$ | $v_1$ |
| $-s\frac{6EI}{L^2}$ | $c\frac{6EI}{L^2}$ | $\frac{4EI}{L}$ | $s\frac{6EI}{L^2}$ | $-c\frac{6EI}{L^2}$ | $\frac{2EI}{L}$ | $\theta_1$ |
| $-(c^2\frac{EA}{L}+s^2\frac{12EI}{L^3})$ | $-sc(\frac{EA}{L}-\frac{12EI}{L^3})$ | $s\frac{6EI}{L^2}$ | $(c^2\frac{EA}{L}+s^2\frac{12EI}{L^3})$ | $sc(\frac{EA}{L}-\frac{12EI}{L^3})$ | $s\frac{6EI}{L^2}$ | $u_2$ |
| $-sc(\frac{EA}{L}-\frac{12EI}{L^3})$ | $-(s^2\frac{EA}{L}+c^2\frac{12EI}{L^3})$ | $-c\frac{6EI}{L^2}$ | $sc(\frac{EA}{L}-\frac{12EI}{L^3})$ | $(s^2\frac{EA}{L}+c^2\frac{12EI}{L^3})$ | $-c\frac{6EI}{L^2}$ | $v_2$ |
| $-s\frac{6EI}{L^2}$ | $c\frac{6EI}{L^2}$ | $\frac{2EI}{L}$ | $s\frac{6EI}{L^2}$ | $-c\frac{6EI}{L^2}$ | $\frac{4EI}{L}$ | $\theta_2$ |

Les caractéristiques élémentaires sont :

**Élément 1 :** **L , E , A , I ,** $\boldsymbol{\theta = 0}$ **, c = 1 , s = 0**

D’ou les matrices de rigidité élémentaires dans le repère globale :

$$[\boldsymbol{K_1}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

**Élément 2 :** **L , E , A , I ,** $\boldsymbol{\theta = -90}$ **, c = 0 , s = - 1**

D'ou les matrices de rigidité élémentaires dans le repère globale :

$$[\boldsymbol{K_2}] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

**Assemblage des matrices de rigidité élémentaires, donne**

$$[\boldsymbol{K_G}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L}+\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{EA}{L}+\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

**Application des conditions aux limites :** $\mathbf{v_1 = u_3 = v_3 = \theta_3 = 0}$

**Le système matriciel devient :**

$$
\begin{bmatrix}
\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L}+\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{EA}{L}+\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\mathbf{u_1} \\ \mathbf{v_1} \\ \boldsymbol{\theta_1} \\ \mathbf{u_2} \\ \mathbf{v_2} \\ \boldsymbol{\theta_2} \\ \mathbf{u_3} \\ \mathbf{v_3} \\ \boldsymbol{\theta_3}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ \mathbf{P} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0
\end{bmatrix}
$$

$$\frac{EA}{L}u_1 - \frac{EA}{L}u_2 = 0$$

$$\frac{4EI}{L}\theta_1 - \frac{6EI}{L^2}v_2 + \frac{2EI}{L}\theta_2 = P$$

$$-\frac{EA}{L}u_1 + (\frac{EA}{L} + \frac{12EI}{L^2})u_2 + \frac{6EI}{L^2}\theta_2 = 0$$

$$-\frac{6EA}{L^2}\theta_1 + (\frac{EA}{L} + \frac{12EI}{L^2})v_2 - \frac{6EI}{L^2}\theta_2 = 0$$

$$\frac{2EI}{L}\theta_1 + \frac{6EI}{L^2}u_2 - \frac{6EI}{L^2}v_2 + \frac{8EI}{L}\theta_2 = 0$$

La résolution du système réduit donne les déplacements inconnus

$$
\begin{Bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix}
0.01316 \ \text{m} \\
9.199(10^{-4}) \ \text{rad} \\
0.01316 \ \text{m} \\
-9.355(10^{-5}) \ \text{m} \\
-1.887(10^{-3}) \ \text{rad}
\end{Bmatrix}
$$

Le système réduit des inconnues statiques donne les réactions forces et moments, on trouve

$$\begin{Bmatrix} R_{1Y} \\ R_{3X} \\ R_{3Y} \\ R_{3\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.87 \quad \text{KN} \\ -5.00 \quad \text{KN} \\ 1.87 \quad \text{KN} \\ 18.77 \ \text{KN.m} \end{Bmatrix}$$