التوزيعات الاحتمالية المنفصلة

(Discrete Probability Distributions)

بعد التعرف على المتغيرات العشوائية المنفصلة نحاول في هذه المحاضرة دراسة بعض التوزيعات الاحتمالية المنفصلة وكيفية تطبيقها. على هذا الأساس سوف نتناول:

- التوزيع المنتظم؛
- توزيع برنولي؛
- التوزيع الثنائي؛
- التوزيع الهندسي؛
- توزيع بواسون.

1. التوزيع المنتظم (The Discrete Uniforme Distributions):

إذا كان المتغير العشوائي x يأخذ قيما محددة منفصلة ولتكن $x_1, x_2, x_3........x_n$ باحتمالات متساوية، فإن دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير تعطى بالعلاقة التالية:

حيث n تمثل عدد الحالات الممكنة

$$f(x) = P(X = x_i) = \frac{1}{n}$$

مثال: نرمي زهرة نرد منتظمة مرة واحدة:

- ✓ أوجد التوزيع الاحتمالي؛
- ✓ أحسب التوقع الرياضي والتباين.

التوزيع الاحتمالي:

X	1	2	3	4	5	6	$\sum$
P(X=xi)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{6}{6}=1$
$x_i p_i$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{21}{6}=3.5$
$x_i^2 p_i$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{9}{6}$	$\frac{16}{6}$	$\frac{25}{6}$	$\frac{36}{6}$	$\frac{91}{6}$

ومنه دالة الكثافة:

$$f(x) = P(X = xi) = \begin{cases} \frac{1}{6} & ; X = 1,2,3,4,5,6 \\ 0 & ; otherwise \end{cases}$$

التوقع الرياضي والتباين:

طريقة 1

$$E(x) = \sum x_i p(X = x_i) = \frac{21}{6} = 3.5$$

$$V(x) = \sum x_i^2 p(X = x_i) - E(x)^2$$

$$V(x) = \frac{91}{6} - (\frac{21}{6})^2 = \frac{546-441}{36} = \frac{105}{36} = 2.916$$

طريقة2

$$E(x) = \mu = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6}$$

$$V(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2}{n} = \frac{17.5}{6} = 2.916$$

2. توزيع برنولي(Bernoulli Distribution)

1.2. محاولات برنولي(Bernoulli Trials): نقول عن تجربة أو محاولة أنها برنولية (Bernoulli Trail)إذا كانت تحتمل نتيجتين (حدثين) متنافيتين النجاح والفشل.

مثال: نرمي قطعة نقد مرة واحدة، X متغير عشوائي يمثل ظهور الصورة. X={0.1}

إذن X متغيرة عشوائية ا تمثل **عدد مرات النجاح**، تأخذ X القيمة 1 عند تحقق الحدث A و0 في الحالة المعاكسة. يمكن تلخيص التوزيع الاحتمالي لتوزيع برنولي كما يلي:

- نرمز لاحتمال النجاح بـP؛
- احتمال الفشل بـ q

xi	0	1	∑
P(X=xi)	q	P	q +p=1

إذن توزيع برنولي يكون كما يلي: $$f(x)=\begin{cases} P & ;x=1 \\ q & ;x=0 \end{cases}$$ حيث: $P+q=1$

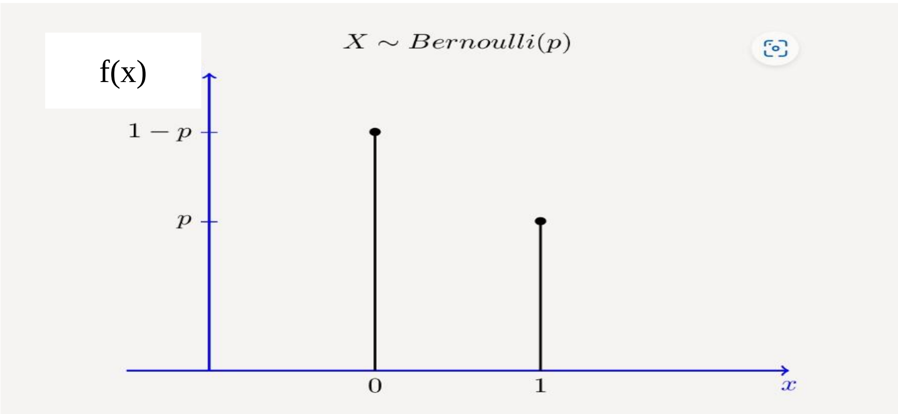
عادة ما نكتب عن توزيع برنولي الصيغة التالية: X ~ B(1, p) حيث نعني أن n=1 واحتمال النجاح هو P.

2.2. خصائص توزيع برنولي:

xi	0	1	∑
P(X=xi)	q	P	q +p=1
E(x)	0	P	P
E(X²)	0	P	P

$$E(x)=\sum x_i p(X=x_i)=P$$
$$V(x)=\sum x^2{}_i p(X=x_i)-E(x^2)$$
$$V(x)=P-P^2=P(1-P)=pq$$

3.1. التمثيل البياني: نجد قيمتين لـ x (0، 1) و احتمال الفشل والنجاح (P; q)، في الرسم التالي نفرض أن احتمال الفشل أكبر من احتمال النجاح (q>p).



3. التوزيع ثنائي الحدين(The Binomial Distribution)

1.3.مفاهيم: إذا كررنا تجربة برنولي n مرة فإن المتغير الذي يمثل عدد مرات النجاح يأخذ القيم: $X=0, 1, 2, 3, \ldots n$

مثال: لنقوم بمحاولات برنولي n مرة والمتمثلة في رمي قطعة نقدية مكررة عدد n من المرات، وX عدد مرات الحصول على صورة (F):

وبالتالي فاحتمال عدد ما x من النجاحات من بين n تجربة برنولية يحسب كما يلي:

إن احتمال حدوث الحدث، x مرة في n محاولة (أي x مرة نجاح، و(n-x) مرة فشل **يتحقق بالمعادلة التالية:**

إذن توزيع ثنائي الحدين يكون كما يلي: $f(x)=\left\{C_n^x P^x (1-P)^{n-x} ; x=0,1,2,3.........n\right\}$

حيث:

- ✓ x عدد مرات النجاح؛
- ✓ p احتمال النجاح في التجربة الواحدة (يبقى ثابت عند تكرار التجربة؛ أي الحوادث مستقلة)؛
- ✓ q = 1-p احتمال الفشل؛
- ✓ n عدد محاولات برنولي؛ أي عدد مرات تكرار التجربة.

يمكن تلخيص خصائص التوزيع الثنائي كما يلي: **X ~ Binomial(n, p)** **حيث n** تجربة برنولية مكررة وP احتمال النجاح في التجربة يكون ثابت (التجارب مستقلة).

2.3. خصائص التوزيع الثنائي:

$$E(x)=np$$
$$V(x)=npq$$
$$f(x)=\left\{C_n^x P^x (1-P)^{n-x} \qquad ; x=0,1,2,3.........n\right\}$$

مثال : أحسب احتمال الحصول على 2 صورة في 6 محاولات من رمي قطعة نقد متوازنة، ثم أحسب E(x), V(x)

لدينا 6 محاولات (n=6)، X={0, 1, 2, 3. 4. 5. 6}، P=0.5, q=0.5

$$P(x=2)=C_6^2 P^2 q^{6-2}=\frac{6!}{2!4!}(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^4=\frac{15}{64}$$
$$E(x)=np=6\times\frac{1}{2}=3$$
$$V(x)=npq=6\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{6}{4}$$

4. التوزيع الهندسي (Geometric Distribution)

هنا يتم تكرار تجربة (محاولات برنولي) حتى يتحقق الحدث الذي نريد، يرمز للتوزيع الهندسي بـ $X \sim Geo(P)$ ؛ أي إذا كانت التجارب هي تجارب برنولي حيث احتمال النجاح ثابت وكل تجربة مستقلة عن الأخرى. هنا المتغير X عبارة عن عدد التجارب اللازمة للحصول على أول نجاح محدد، بمعنى عدد التجارب غير محددة من البداية كتوزيع ثنائي الحدين.

1.4. استنتاج صيغة قانون التوزيع الهندسي:

نرمي قطعة نقدية إلى أن نحصل على صورة (F).

- ✓ نرمز لاحتمال النجاح بـ P، واحتمال الفشل q=(1-p)؛
- ✓ نرمز لـ x بعدد الرميات؛ إذن $X=\{1,2,3..........\}$

في حالة ظهور الصورة في الرمية 1	$P_X(1)=P(X=1)=P(F)=P=(1-P)^0 P$
في حالة ظهور الصورة في الرمية 2	$P_X(2)=P(X=2)=P(PF)=qp=(1-p)p$
في حالة ظهور الصورة في الرمية 3	$P_X(3)=P(X=3)=P(PPF)=qqp=(1-p)^2 p$
....	
في حالة ظهور الصورة في الرمية n	$P_X(n)=P(X=n)=P(PPP......PF)=qqq....qp=(1-p)^{n-1} p$

من خلال ما سبق نستنتج أن دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الهندسي كما يلي:

$$f(x) = P(X = xi) = \begin{Bmatrix} P(1-P)^{x_i - 1} & ; X = 1,2,3,.......... \\ 0 & ; otherwise \end{Bmatrix}$$

مثال عددي: أحسب احتمال أن يتطلب 4 رميات للحصول على صورة.

$$P_X(4) = P(X = 4) = P(PPPF) = qqqp = (1-p)^3 p = (\frac{1}{2})^3 \times \frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$$

2.4. خصائص التوزيع الهندسي:

$$E(x) = \frac{1}{P}; \qquad V(x) = \frac{q}{p^2}$$

التوقع الرياضي والتباين للمثال السابق: $E(x) = \frac{1}{P} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2; \qquad V(x) = \frac{q}{p^2} = \frac{\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2})^2} = 2$

5. توزيع بواسون (Poisson Distribution)

لما نكرر تجربة برنولي إلى عدد كبير أو لا نهائي من المرات ($n \to \infty$)، وعند حساب الاحتمالات (طبعا نطبق توزيع ثنائي الحدين) نجد صعوبة باستعمال صيغة هذا التوزيع، كما أن عملية التكرار الكبير للتجربة يجعله مقاسا بالزمن ويكون احتمال تحقق الحدث صغير جدا أو يؤول إلى 0، على هذا الأساس نحتاج إلى توزيع جديد.

إذن يمكن تلخيص ما سبق كما يلي:

توزيع بواسون	حالة خاصة	التوزيع الثنائي
$X \sim Poisson(\lambda)$ $f(x) = \begin{Bmatrix} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & ; x = 0,1,2,3.........n \end{Bmatrix}$ $E(x) = V(x) = \lambda$	$\begin{Bmatrix} n \to +\infty \\ P \to 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$	$X \sim Binomial(n, p)$ $f(x) = \{C_n^x P^x (1-P)^{n-x}; x = 0,1,2,3.........n\}$ $E(x) = np \quad ; V(x) = npq$

إذن توزيع بواسون هو توزيع كمي منفصل له استخدامات واسعة خاصة في مجال الإدارة والأساليب الكمية $X \sim P(\lambda)$:

- ✓ يعتمد أساسا على معلمة λ والتي تسمى بمعلمة التوزيع.
- ✓ كما أن التوقع الرياضي والتباين متساويان في هذا التوزيع ويساويان المعلمة λ.

مثال: إذا كان عدد المكالمات التي ترد على فرع إحدى الشركات له توزيع بواسون بمتوسط 4 مكالمات في الدقيقة.

أوجد احتمال ورود 3 مكالمات في الدقيقة.

الحل: توزيع بواسون $X \sim P(\lambda)$ حيث $\lambda = 4$ ، ومنه

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} + \lambda^x}{x!}$$

$$p(X = 3) = \frac{e^{-4} + 4^3}{3!} = \frac{64}{6} e^{-4} = 0.195$$