المتغيرات العشوائية المتصلة (Continuous Random Variables)

يصادفنا في كثير من الأحيان متغيرات عشوائية تأخذ جميع القيم في فترة ما، مثل هذه المتغيرات تسمى متغيرات عشوائية متصلة وبالتالي لا نستطيع البدء في عد تلك القيم التي يأخذها، فمثلا الطول يكون متغير عشوائي متصل حيث يمكن أن يأخذ أي قيمة في المجال]1.50 m; 1.70 m[، حيث في هذا المجال سوف نجد عدد لا نهائي من القيم التي من الممكن أن يأخذها متغيرة الطول.

1.تعريف المتغير العشوائي المتصل (المستمر): هو متغير عشوائي يأخذ عددا لا منتهيا من القيم في مجال محدود؛ أي يأخذ أي قيمة داخل هذا المجال.

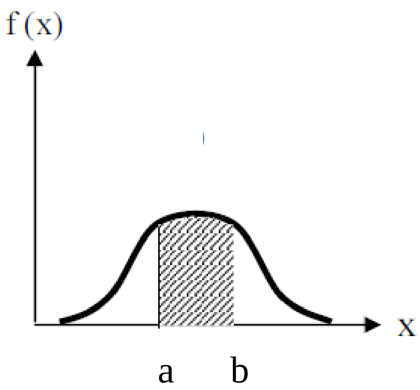
2.التوزيع الاحتمالي المستمر: هو الجدول الذي يتضمن جميع القيم الممكنة مع الاحتمال الخاص لكل منها، ولكن عدد القيم غير محدودة وبالتالي نجد اشكال في حساب الاحتمال.

نعلم أن المتغير المستمر يمكن تمثيله بمنحنى كما يلي:

نفرض أن متغير مستمر يقع في المجال $x \in [a,b]$ ؛ أي $a \le x \le b$.

إن احتمال أن يقع المتغير العشوائي x في المجال $[a,b]$ يرمز له بـ $P(a \le x \le b)$.

إذن يمثل الاحتمال $P(a \le x \le b)$ المساحة المحصورة بين الدالة $f(x)$ ومحور الفواصل X



إن المساحة المظللة والتي يمكن حسابها باستعمال التكامل كما يلي: $P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)dx$

حيث دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير المستمرة والتي تحقق الشرطين التاليين:

$$- f(x) \ge 0$$

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

بمعنى أن دالة $f(x)$ دالة موجبة والمساحة المحصورة تحت المنحنى تساوي 1.

مثال: أوجد قيمة الثابت C حتى تكون $f(x)$ دالة كثافة احتمالية ثم أحسب $P(1 \le x \le 2)$

$$f(x)=\begin{cases} cx^2 ....,0\le x\le 3 \\ 0......., Sinon \end{cases}$$

الحل: من أجل أن تكون $f(x)$ دالة كثافة احتمالية لابد من تحقق الشرطان:

- نلاحظ أن $f(x)$ موجبة $f(x)\ge 0$
- $\int_0^3 f(x)dx=1$

$$\int_0^3 f(x)dx=1 \Rightarrow \int_0^3 cx^2dx=1 \Rightarrow c\int_0^3 x^2dx=1$$

$$\Rightarrow c\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3=1 \Rightarrow \left(c\left[\frac{3^3}{3}\right]-c\left[\frac{0^3}{3}\right]\right)=1$$

$$\Rightarrow 9c=1 \Rightarrow c=\frac{1}{9}$$

إذن؛ $c=\frac{1}{9}$

دالة الكثافة الاحتمالية هي:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{9}x^2 ....,0\le x\le 3 \\ 0......., Sinon \end{cases}$$

$$P(1\le x\le 2)=\int_1^2 f(x)dx=\frac{1}{9}\int_1^2 x^2dx=\frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9}\left[\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right]=\frac{1}{9}\left(\frac{7}{3}\right)=\frac{7}{27}$$

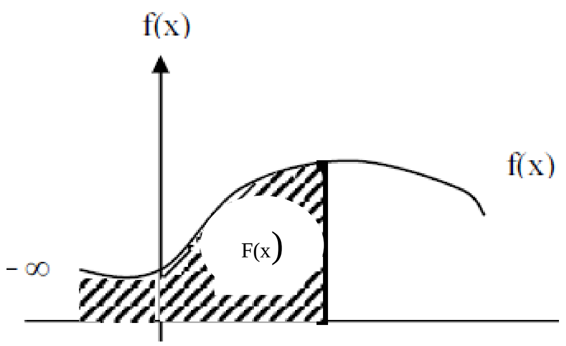
إذن : $P(1\le x\le 2)=\frac{7}{27}$

3.دالة التوزيع $F(x)$

تعرف دالة التوزيع أو الدالة التجميعية $F(x)$ للمتغير المستمر كما يلي:

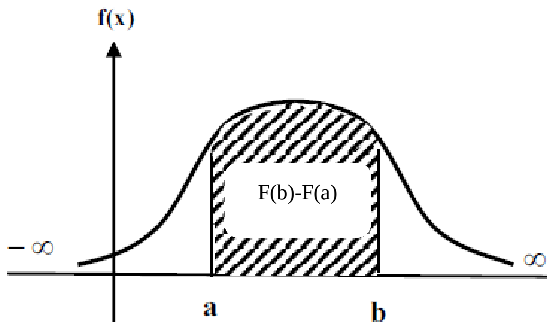
$$F(x)=P(X\le x_i)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

بحيث أن: $\lim_{x\to-\infty} F(X)=0$ ، $\lim_{x\to+\infty} F(X)=1$



ملاحظة هامة: $F(x)$ لها أهمية كبيرة لأن في حالة المتغير المستمر نهتم بحساب احتمال مجال وليس احتمال قيمة وحيدة، ولحساب الاحتمال نعوض في دالة التوزيع بدلا من حساب التكامل في كل مرة نريد حساب الاحتمال.

فمن أجل حساب الاحتمال التالي: $P(a\le x\le b)$



$$P(a \le x \le b) = P(x \le b) - P(x \le a)$$

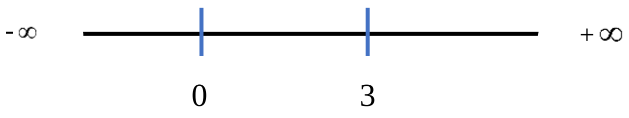
$$P(a \le x \le b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

$$P(a \le x \le b) = F(b) - F(a)$$

مثال: أوجد دالة التوزيع $F(x)$ للمثال السابق ثم أحسب $P(1 \le x \le 2)$

دالة الكثافة الاحتمالية هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2 ....,0 \le x \le 3 \\ 0......., Sinon \end{cases}$$



أولا: نحسب دالة التوزيع $F(x)$، حيث نلاحظ وجود 3 مجالات

$$-x \prec 0 \Rightarrow F(0) = P(x \le 0) = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx = 0$$

$$-0 \le x \le 3 \Rightarrow P(0 \le x \le 3) = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{x=3} f(x)dx$$

$$\Rightarrow 0 + \frac{1}{9}\int_{0}^{x} x^2 dx \Rightarrow \frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{x=3} = \frac{x^3}{27}$$

$$-x \ge 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{+\infty} f(x)dx$$

$$\Rightarrow 0 + \left[\frac{x^3}{27}\right]_0^3 + 0 = \left[(\frac{3^3}{27}) - 0\right] = 1$$

ثانيا: نقوم بحساب الاحتمال من خلال $F(x)$

بعد حساب دالة التوزيع $F(x)$ نحسب الاحتمال $P(1 \le x \le 2)$

$$P(1 \le x \le 2) = F(2) - F(1)$$

$$\Rightarrow \left(\left[\frac{2^3}{27}\right] - \left[\frac{1^3}{27}\right]\right) = \frac{8-1}{27} = \frac{7}{27}$$

إذن دالة التوزيع $F(x)$ تكتب كما يلي:

$$F(x) = \begin{cases} 0......., x \prec 0 \\ \frac{x^3}{27} ....,0 \le x \le 3 \\ 1......., x \ge 3 \end{cases}$$

4. التوقع الرياضي والتباين للمتغير المستمر

1.4. التوقع الرياضي E(x): يعرف التوقع الرياضي لمتغير عشوائي مستمر كما يلي:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx$$

2.4. التباين V(x): يعرف التباين للمتغير المستمر كما يلي:

$$V(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(x))^2 . f(x)dx$$

$$V(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 . f(x)dx - E(x)^2$$

ملاحظة: من التباين نحدد الانحراف المعياري للمتغيرة العشوائية المستمرة بأنه الجذر التربيعي لـ $V(x)$

$$\sigma_X = \sqrt{V(x)}$$

مثال: لتكن لديك دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x....,0 \prec x \prec 3 \\ 0......., Sinon \end{cases}$$

أحسب: التوقع الرياض والتباين.

✓ التوقع الرياضي E(x)

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx$$

$$E(x) = \int_{0}^{2} x.(\frac{1}{2}x)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2$$

$$E(x) = \left[\frac{2^3}{6} - \frac{0^3}{6}\right] = \frac{4}{3}$$

✓ التباين V(x)

$$V(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2.f(x)dx - E(x)^2$$

$$V(x) = \int_{0}^{2} x^2.(\frac{1}{2}x)dx - E(x)^2$$

$$V(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 - (\frac{4}{3})^2 = \left[\frac{2^4}{8} - 0\right] - \frac{16}{9}$$

$$V(x) = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$$

✓ الانحراف المعياري σ_X

$$\sigma_X = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$