Centre universitaire Abdelhafid Boussouf-Mila
Institut des Sciences et Technologie
Département de Mathématiques et Informatique
L3 Mathématiques/ S6/ 2022-2023
Matière: **Introduction à la théorie des opérateurs linéaires**

Serie 1: L'espace L(X,Y)

Partie I

Exercice1
Soit $(\omega_j)_{j=1}^{\infty}$ une suite de nombres complexes. On définit sur ℓ_2, un opérateur D_ω par:

$$\begin{array}{rcl} D_\omega & : & \ell_2 \longrightarrow \ell_2 \\ x & = & (x_1, x_2, ...) \longmapsto D_\omega x = (\omega_1 x_1, \omega_2 x_2, ...) \end{array}$$

1- Prouver que D_ω est borné si et seulement si $(\omega_j x_j)_{j=1}^{\infty}$ est bornée et dans ce cas

$$\|D_\omega\| = \sup_j |\omega_j| .$$

2- Supposons que, $\sup\limits_j |\omega_j| < \infty$. et que D_ω^{-1} est inversible.
a- Donner une expression de D_ω^{-1}. Calculer $\|D_\omega^{-1} e_j\|$, où e_j est un vecteur de la base hilbertienne de ℓ_2.
b- Prouver que D_ω est inversible si et seulement si $\inf\limits_j |\omega_j| > 0$.

Exercice2* Soient V et W deux espaces de Hilbert, soit $T \in \mathcal{L}(V, W)$. et soit $T^* \in \mathcal{L}(W, V)$ l'adjoint de T.
Montrer que l'image de la suite qui converge faiblement dans V est une suite faiblement convergente dans W.

Exercice3 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de scalaires ayant la propriété:

$$\forall (x_n) \in C_0 : (a_n x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_0$$

où $C_0 = \left\{ (x_n)_n \in \mathbb{k}; \lim\limits_n x_n = 0 \right\}$, muni de la norme $\|x\| = \sup\limits_n |x_n|$. On définit T_n tel que:

$$\begin{array}{rcl} T_n & : & C_0 \to C_0 \\ (x_n) & \longmapsto & T_n(x_n) = (a_1 x_1, a_2 x_2, a_3 x_3, .., a_n x_n, 0, 0, ..) \end{array}$$

et T tel que:

$$\begin{array}{rcl} T & : & C_0 \to C_0 \\ (x_n) & \longmapsto & T(x_n) = (a_1 x_1, a_2 x_2, a_3 x_3, .., a_n x_n, ...) \end{array}$$

1- Montrer que l'application T_n est linéaire et continue.

2- Calculer $\|T_n\|$, puis $\|T_n x_n - T x_n\|$
3- Montrer que $T_n x_n \to T x_n$, et déduire que la suite $\{\|T_n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
4- Sachant que,

$$\ell_\infty = \left\{(x_n)_n \in \mathbb{k} : \sup_n |x_n| < \infty\right\},$$

- Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$.

Exercice4 On considère les opérateurs linéaires bornés :

$$\begin{array}{rcl} A_n & : & \ell_2 \to \ell_2, \\ x & = & (x_1, x_2, x_3, ...) \longrightarrow A_n(x) = (\frac{x_1}{n}, \frac{x_2}{2n}, \frac{x_3}{3n}...) \end{array}$$

et,

$$\begin{array}{rcl} B_n & : & \ell_2 \to \ell_2 \\ x & = & (x_1, x_2, x_3, ...) \longrightarrow B_n(x) = (0, 0, ..., x_{n+1}, x_{n+2}, ...) \end{array}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$.
1- Calculer $\|A_n x\|$, *et* prouver que $\|A_n\| \to 0$.
2- On pose $S = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$. Calculer $\lim_{n\to\infty} S - \|B_n(x)\|$, .et déduire $\lim_{n\to\infty} B_n(x), \ \forall x \in \ell_2$.
3- Calculer la norme de B_n, et vérifier que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 pour la norme d'opérateurs.

Exercice5* Soit G un espace de Banach, $B' \subset G'$. Suposons que:

$$\forall x \in G, \qquad \langle B', x\rangle = \bigcup_{f\in B'} \langle f, x\rangle$$

est borné dans $\mathbb{R}$. On pose $\{T_b\}_{b\in B'}$ la suite d'opérateurs tels que:

$$T_b : B' \subset G' \underset{x\longmapsto\langle b,x\rangle}{\to} \mathbb{R}, \ b \in B'$$

1- Montrer que $\|T_b\|$ est bornée.
2- Déduire que B' est borné.

N.B. Les exercices* sont laissés à l'étudiant.