IV. <u>THEOREME DE GAUSS</u>

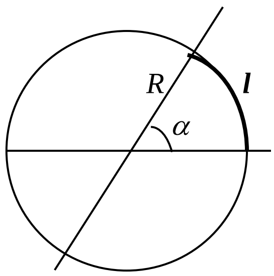
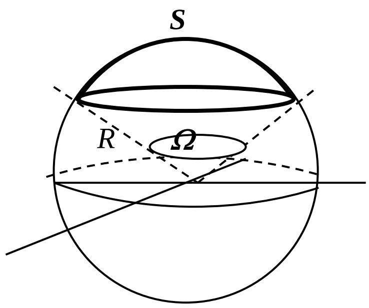
Outils mathématiques :
On définit le vecteur surface élémentaire :

$$\overrightarrow{dS} \quad \begin{cases} \bullet \ \text{Module = surface } dS \\ \bullet \ \text{Direction} \perp \text{à la surface } dS \\ \bullet \ \text{Sens : choix arbitraire} \end{cases}$$

Remarque : pour une surface fermée, on choisit, en général, le vecteur $d\Sigma$ ***sortant***.

On définit l'angle solide par :
L'angle dans l'espace sous lequel on peut voir une surface quelconque S.

Analogie entre l'angle plan et l'angle solide :

Angle plan	Angle solide
La longueur de l'arc de cercle $l = R.\alpha$ α (radian)  	*La surface de la calotte sphérique* $S = R^2.\Omega$ Ω (stéradian) 
Pour la circonférence complète du cercle, on trouve l'angle sous lequel on voit tout le plan: $l = 2\pi.R$ $\alpha = 2\pi$ rad	*Pour la surface complète de la sphère, on trouve l'angle sous lequel on voit tout l'espace:* $S = 4\pi.R^2$ $\Omega = 4\pi$ st
pour un angle très petit (infinitésimal) $dl = R.d\alpha$	*pour un angle très petit (infinitésimal)* $dS = R^2.d\Omega$
L'angle sous lequel une courbe dl' quelconque faisant un angle θ avec dl : $dl = dl'.\cos(\theta) = R.d\alpha$	*L'angle sous lequel une surface dS' quelconque faisant un angle θ avec dS :* $dS = dS'.\cos(\theta) = R^2.d\Omega$

V.1. Flux du vecteur champ électrostatique :

On définit le flux du champ électrique E à travers une surface élémentaire $d\Sigma$ par la grandeur scalaire : $d\Phi = \vec{E} \bullet d\vec{S}$

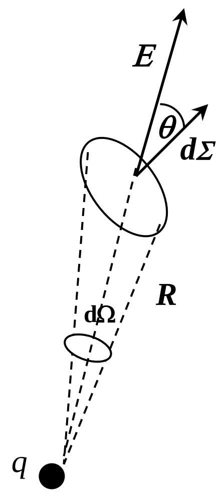
Le flux à travers une surface S est donné par l'intégrale :

$$\boxed{\Phi = \int d\Phi = \iint_S \vec{E} \bullet d\vec{S}}$$

E est la valeur du champ en tout point dS de la surface S.

Cas d'une charge ponctuelle :

D'après la figure on voit que l'angle entre E et $d\Sigma$ est le même que l'angle entre la surface dS et la surface de la sphère de rayon R centrée en q.



D'où : $d\Phi = \vec{E} \bullet d\vec{S} = E.dS.\cos(\theta)$

Mais puisque $dS.cos(\theta) = R^2.d\Omega$ et $E = K\dfrac{q}{R^2}$

Alors $d\Phi = K.q.d\Omega$

Et pour une surface S : $\boxed{\Phi = K.q.\Omega}$

Tel que Ω est l'angle solide sous lequel on voit la surface S à partir de la charge q.

Remarque :

D'après la relation précédente, on remarque que le flux du champ crée par une charge ponctuelle à travers une surface est indépendant de la distance de celle-ci par rapport à la charge, et dépend uniquement de l'angle solide sous lequel on voit cette surface.

Le flux pour deux surfaces observées sous le même angle solide est identique en valeur absolue.

V.2. Théorème de GAUSS :

Le théorème de GAUSS concerne le flux du champ électrique à travers une surface fermée.

Charge à l'intérieur de la surface :

Pour une charge qui se trouve à l'intérieur d'une surface fermée, l'angle sous lequel on peut voir toute la surface est $\Omega = 4\pi$ st. D'où : $\Phi = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$

Charge à l'extérieur de la surface :

Si une charge est située à l'extérieur de S, le flux total du champ électrique crée par cette charge à travers S est nul.

- A chaque élément de surface dS on peut associer un élément dS' vu sous le même angle solide $d\Omega$. Les flux $d\Phi$ et $d\Phi$' sont égaux en valeur absolue et signes opposées ($d\Sigma$ orienté vers l'extérieur).
- Ceci est général quelque soit la forme de la surface.

- En intégrant on peut diviser la surface S en deux partie
  S_1 où le champs E est dirigé suivant $d\Sigma \Rightarrow$ le flux est positif $\Phi_1 = +K.q.\Omega$
  S_2 où le champs E est dirigé dans le sens opposé à $d\Sigma \Rightarrow$ le flux est négatif $\Phi_2 = -K.q.\Omega$
  Et le flux total est donné par
  $$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 0$$

Cas général :

En présence de plusieurs charges à l'intérieur et à l'extérieur de la surfa ce S. Le flux total est la somme des flux de chaque charge.

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{S} = \oiint_S \left(\sum \vec{E}_i\right) \bullet d\vec{S} = \sum \left(\oiint_S \vec{E}_i \bullet d\vec{S} \right) = \sum \Phi_i$$

Puisque le flux des charges extérieur est nul, alors, le flux total est égal au flux des charges à l'intérieur de la surface.

D'où, *le théorème de GAUSS :*

$$\boxed{\Phi = \oiint_S \vec{E} \bullet d\vec{S} = \frac{\sum q_{\text{intérieures}}}{\varepsilon_0}}$$

Remarques :

Si le flux est nul, alors il n'y a pas de charges à l'intérieur de la surface de GAUSS, ou la somme algébrique de ces charges est nulle.
« Le flux du champ crée par les charges extérieures est nul » ne veut pas dire que le champ crée par ces charges est nul sur la surface.

Exemples :

- Droite infinie chargée avec une densité linéique λ.
- Plan infini chargé avec une densité surfacique σ.
- Sphère creuse chargée avec une densité surfacique σ (intérieur et extérieur).
- Sphère pleine chargée avec une densité volumique ρ (intérieur et extérieur).