الفصل الثالث:

تكافؤ المعدلات ورؤوس الأموال

I. المعدلات المتناسبة والمعدلات المتكافئة:

عادة ما يتم إستخدام معدلات الفائدة سنوياً، أي أن هذه المعدلات تُطبق مرة واحدة في السنة على المبلغ في كل نهاية سنة. إلا أن هناك تطبيق لمعدل الفائدة على أجزاء من السنة (شهر، ثلاثي، سداسي،...إلخ)، وفي هذه الحالة فإن المدة n لا تُصبح بالسنوات بل بعدد الفترات الجزئية من السنة، وبعبارة أخرى، عدد مرات تطبيق معدل الفائدة في السنة. وحتى في هذه الحالة يُمكن إستخدام الجداول المالية حيث يتم إعتبار n في الجداول المالية عبارة عن عدد مرات تطبيق معدل الفائدة المركبة. وفي حالة تطبيق معدلات فائدة غير سنوية أوجزئية من السنة يُمكن أن نتحدث عن معدلات متناسبة ومعدلات مكافئة.

1- المعدلات المتناسبة:

المعدل المتناسب مع معدل سنوي معين i هو المعدل الذي يُطبق في p جزء من السنة بحيث يُحدد هذا المعدل i_p حسب العلاقة :

$$i_p = \frac{i}{p}$$

فمعدل 8% السنوي= المعدل السداسي المتناسب $i_p = \frac{i}{p} \Rightarrow i_2 = \frac{8\%}{2} = 4\%$

= المعدل الثلاثي المتناسب $i_p = \frac{i}{p} \Rightarrow i_4 = \frac{8\%}{4} = 2\%$

= المعدل الشهري المتناسب $i_p = \frac{i}{p} \Rightarrow i_{12} = \frac{8\%}{12} = 0.67\%$

ولا تتساوى الفائدة المركبة في نهاية المدة عند إستعمال معدل الفائدة المركب السنوية ومعدل الفائدة المركب المتناسب. فإذا كان i هو المعدل السنوي و $\frac{i}{4}$ هو المعدل الثلاثي المتناسب له، فإن الفائدة المركبة لكل منهما هي على التوالي:

$$I_1 = C[(1+i)-1]$$

$$I_2 = C\left[\left(1+\frac{i}{4}\right)^4 - 1\right]$$

والمحدد لكل من I_1 و I_2 هما قيمتا كل من $(1+i)$ و $\left(1+\frac{i}{4}\right)^4$ على التوالي وهما غير متساويتين.

مثال 1:

أودع أحد الأشخاص مبلغ من المال لدى أحد البنوك قدره 2200 وحدة نقدية بمعدل فائدة مركب سنوي 8% لمدة 5 سنوات.

المطلوب:

أحسب الفائدة المركبة باستخدام معدل الفائدة السنوي ثم المعدل الثلاثي (كل ثلاثة أشهر) المتناسب وماذا تلاحظ؟

الحل:

حساب الفائدة المركبة باستخدام معدل الفائدة السنوي:

$$I = C[(1+i)^n - 1] \Rightarrow I = 2200[(1+0.08)^5 - 1] = 2200(1.469328077 - 1)$$

$$I = 2200(0.469328077) = \mathbf{1032.52}$$ وحدة نقدية

حساب الفائدة المركبة باستخدام المعدل الثلاثي المتناسب:

المعدل السنوي 8%= المعدل الثلاثي المتناسب $i_p = \frac{i}{p} \Rightarrow i_4 = \frac{8\%}{4} = 2\%$

$$I = C\left[\left(1+i_p\right)^{n\times p} - 1\right] = C[(1+i_4)^{5\times 4} - 1] = 2200[(1+0.02)^{20} - 1]$$

$$= 2200(1.485947396 - 1) = 2200(0.485947396) = \mathbf{1069.08}$$ وحدة نقدية

ونلاحظ أن الفائدة المركبة بتطبيق معدل الفائدة المركب السنوي والفائدة المركبة بتطبيق معدل الفائدة الثلاثي المتناسب غير متساويين حيث أن قيمة الثانية أكبر من قيمة الأولى.

2- المعدلات المتكافئة:

هي المعدلات التي تؤدي إلى نفس الجملة لنفس المدة، فمعدل فائدة ثلاثي المكافئ لمعدل فائدة سنوي معين يعطي نفس الجملة لمدة سنة مثلا، فإذا كان المبلغ C مستثمرا لمدة سنة بمعدل سنوي i يصبح في نهاية السنة:

$$C_n = C(1+i)$$

وهذا المبلغ C يُستثمر لنفس المدة بمعدل جزئي i_p بحيث يُطبق p مرة في السنة تكون جملته:

$$C'_n = C(1+i_p)^p$$

وحتى يكون المعدلان متكافئين يجب تساوي الجملتين:

$$C_n = C'_n \Rightarrow C(1+i) = C\left(1+i_p\right)^p \Rightarrow i = \left(1+i_p\right)^p - 1 \Rightarrow i_p = \sqrt[p]{(1+i)} - 1$$

$$\boxed{i_p = (1+i)^{\frac{1}{p}} - 1}$$

مثال 2:

أحسب معدل الفائدة المركب لكل 4 أشهر المكافئ لمعدل فائدة سنوي مركب يساوي 9.75%.

الحل:

المعدل المطبق كل 4 أشهر يؤدي إلى أن عدد المرات المطبق فيها هو 3 مرات. ومنه:

$$i_p = (1+i)^{\frac{1}{p}} - 1 \Rightarrow i_3 = (1+0.0975)^{\frac{1}{3}} - 1 \Rightarrow \boxed{i_3 = 3.15\%}$$

II. تكافؤ رؤوس الأموال:

قد تُجبر الظروف المالية والإقتصادية الأشخاص والشركات على إعادة النظر في الديون القصيرة والطويلة الأجل التي في ذمتهم. فقد يظطر هؤلاء إلى طلب تأجيل سداد تلك الديون إلى فترات أبعد من موعد إستحقاقها الأصلي. وفي هذه الحالة، قد يتم إستبدال دين واحد بدين آخر جديد أو دين بمجموعة من الديون، أو مجموعة من الديون بدين واحد جديد أو مجموعة من الديون بمجموعة أخرى من الديون. وتخضع هذه العملية إلى مبدأ التكافؤ.

1- مفهوم تكافؤ رؤوس الأموال:

يتكافأ رأسمالان أحدهما مقابل الآخر، أو أحد مقابل عدد آخر، إذا تساوت القيمة الحالية للطرفين المتقابلين عند تاريخ معين يُسمى بتاريخ التكافؤ.

2- تكافؤ رؤوس الأموال أو الديون قصيرة الأجل:

يعتمد إستبدال الديون أو السندات على مبدأ تكافئهما عند تاريخ الإستبدال (تاريخ التكافؤ). فالمدين الذي يعجز عن سداد ديونه التي يُعرف مواعيد إستحقاقها بإمكانه أن يستبدلها بديون أخرى تُستحق بعد فترة أطول شرط أن تكون لها نفس القيمة الحالية للديون القديمة بتاريخ الإستبدال أو تاريخ التكافؤ.

2-1- قانون التكافؤ:

ما دام المبدأ الأساسي للتكافؤ هو تساوي القيم الحالية، إذا:

القيمة الحالية للسند أو الدين الجديد = القيمة الحالية للسند أو الدين القديم

لنفترض أن:

V_{a1} : القيمة الحالية للدين أو السند القديم؛

V_{a2} : القيمة الحالية للدين أو السند الجديد.

ومنه فإن الدينين أو السندين متكافئين إذا تساوت قيمتهما الحالية، أي:

$$V_{a_2} = V_{a_1}$$

ويتم في عملية التكافؤ إستخدام الخصم التجاري أو الخصم الصحيح وسوف نقتصر هنا فقط على إستخدام الخصم التجاري. ومنه:

$$V_{a_2}=V_{a_1}\Rightarrow V_{n_2}-\left(V_{n_2}\times i\times n_2\right)=V_{n_1}-\left(V_{n_1}\times i\times n_1\right)$$

حيث:

V_{n1}: القيمة الإسمية للسند القديم؛

V_{n2}: القيمة الإسمية للسند الجديد؛

n_1: المدة الفاصلة بين تاريخ التكافؤ وتاريخ إستحقاق السند القديم؛

n_2: المدة الفاصلة بين تاريخ التكافؤ وتاريخ إستحقاق السند الجديد؛

i: معدل الخصم (والذي يجب أن يكون نفسه للسندات القديمة والسندات الجديدة).

مثال 3:

كمبيالة مسحوبة بتاريخ 2 ماي بقيمة 10000 وحدة نقدية تستحق الدفع بتاريخ 31 جويلية. وفي 21 جويلية إتفق المدين والدائن على تأجيل الإستحقاق إلى 20 أوت. معدل الخصم هو 6%.

المطلوب:

ما هي القيمة الإسمية للورقة الجديدة؟

الحل:

$V_{n1}=10000$ وحدة نقدية

$i=6\%$

تاريخ التكافؤ هو 21 جويلية (التاريخ الذي أُتفق فيه على تأجيل الإستحقاق)

المدة الباقية لإستحقاق الورقة الأصلية من 21 جويلية حتى 31 جويلية = 10 أيام، ومنه : $n_1=\frac{10}{360}$

المدة الباقية لإستحقاق الورقة الجديدة من 21 جويلية حتى 20 أوت = 30 يوماً، ومنه: $n_2=\frac{30}{360}$

$$V_{a2}=V_{a1}\Longrightarrow V_{n2}-(V_{n2}\times i\times n_2)=V_{n1}-(V_{n1}\times i\times n_1)$$

$$V_{n2}-\left(V_{n2}\times\frac{6}{100}\times\frac{30}{360}\right)=10000-\left(10000\times\frac{6}{100}\times\frac{10}{360}\right)\Rightarrow \boldsymbol{V_{n2}=10033.50}$$ وحدة نقدية

2-2- تكافؤ عدة رؤوس أموال أو ديون:

وبنفس مبدأ تكافؤ سندين أو دينين، فيُمكن أن يتكافئ عدد من الديون أو السندات مع عدد آخر مع تساوي دائماً القيم الحالية للطرفين عند تاريخ التكافؤ.

مثال 4:

نريد إستبدال ورقتين تجاريتين أدناه بورقة تجارية تُستحق بعد 72 يوماً. معدل الخصم 5%.

- الورقة الأصلية الأولى قيمتها الإسمية 4000 وحدة نقدية تُستحق بعد 36 يوماً.
- الورقة الأصلية الثانية قيمتها الإسمية 5500 وحدة نقدية تُستحق بعد 54 يوماً.

المطلوب:

ماهي قيمة الورقة التجارية الجديدة؟

الحل:

$V_{n1} = 4000$ وحدة نقدية , $V_{n2} = 5500$ وحدة نقدية

$n_1 = \frac{36}{360}, n_2 = \frac{54}{360}, n_3 = \frac{72}{360}$

$i = 5\%$

$$V_{a3} = V_{a1} + V_{a2} \Longrightarrow V_{n3} - (V_{n3} \times i \times n_3) = \left(V_{n1} - (V_{n1} \times i \times n_1)\right) + \left(V_{n2} - (V_{n2} \times i \times n_2)\right)$$

$$V_{n3} - \left(V_{n3} \times \frac{5}{100} \times \frac{72}{360}\right) = \left(4000 - \left(4000 \times \frac{5}{100} \times \frac{36}{360}\right)\right) + \left(5500 - \left(5500 \times \frac{5}{100} \times \frac{54}{360}\right)\right)$$

$0.99V_{n3} = 3980 + 5458.75 \Rightarrow \boldsymbol{V_{n3} = 9534.1}$ وحدة نقدية

2-3- إستخدام قانون التكافؤ:

بتطبيق قانون تكافؤ رؤوس الأموال أو الديون يُمكن تحديد أي عنصر مجهول مع ضرورة معلومية باقي العناصر.

مثال 5:

قمنا باستبدال ورقة تجارية قيمتها 9000 وحدة نقدية بقي على مدة إستحقاقها 33 يوماً بورقة جديدة قيمتها الإسمية 9047 وحدة نقدية مع العلم أن معدل الخصم هو 6%.

المطلوب:

ماهي المدة الباقية لإستحقاق الورقة التجارية الجديدة ؟

الحل:

$V_{n1} = 9000$ وحدة نقدية , $V_{n2} = 9047$ وحدة نقدية

$n_1 = \frac{33}{360}$

$i = 6\%$

$$V_{a2} = V_{a1} \Longrightarrow V_{n2} - (V_{n2} \times i \times n_2) = V_{n1} - (V_{n1} \times i \times n_1)$$

$$9047 - \left(9047 \times \frac{6}{100} \times \frac{j}{360}\right) = 9000 - \left(9000 \times \frac{6}{100} \times \frac{33}{360}\right) \Longrightarrow j = 63{\cdot}999 \approx$$ **64 يوماً**

كما في حالة تكافؤ رؤوس الأموال أو الديون قصيرة الأجل، فإن مبدأ تكافؤ رؤوس الأموال أو الديون الطويلة الأجل هو تساوي القيم الحالية للطرفين، إلا أن الفرق هنا أننا نستخدم قانون الفائدة المركبة كما يلي:

القيمة الحالية للدين الجديد = القيمة الحالية للدين القديم

أي

$$V'_{a_2} = V'_{a_1} \Rightarrow V'_{n_2}(1+i)^{-n_2} = V'_{n_1}(1+i)^{-n_1}$$

حيث:

V'_{a1}: القيمة الحالية للدين القديم،

V'_{a2}: القيمة الحالية للدين الجديد،

V'_{n1}: القيمة الإسمية للدين القديم،

V'_{n2}: القيمة الإسمية للدين الجديد،

i: معدل الفائدة المركب،

n_1: مدة إستحقاق الدين القديم،

n_2: مدة إستحقاق الدين الجديد.

<u>مثال 6:</u>

شخص مدين بمبلغ 20000 وحدة نقدية يُستحق بعد سنتين، إتفق مع دائنه على إستبدال هذا الدين بدين جديد يُستحق بعد 4 سنوات. معدل الفائدة المركب المطبق هو 6%.

<u>المطلوب:</u>

ماهي قيمة الدين الجديد؟

<u>الحل:</u>

$V'_{n_1} = 20000$ وحدة نقدية

$n_1 = 2$ سنة, $n_2 = 4$ سنوات

$i = 6\%$

$$V'_{a_2} = V'_{a_1} \Rightarrow V'_{n_2}(1+i)^{-n_2} = V'_{n_1}(1+i)^{-n_1} \Rightarrow V'_{n_2}(1+0.06)^{-4} = 20000(1+0.06)^{-2}$$

$$V'_{n_2}(0.792093663) = 20000(0.88999644) \Rightarrow V'_{n_2} = \frac{17799,93}{0.792093663} = \mathbf{22472}$$ وحدة نقدية

3-2- تكافؤ عدة رؤوس أموال أو ديون:

يُمكن إستبدال عدد من الديون بعدد آخر حسب نفس مبدأ إستبدال دين بدين آخر، أي تساوي القيم الحالية للطرفين.

مثال 7:

تاجر مدين بالديون التالية:

- سند قيمته الإسمية 10000 وحدة نقدية يُستحق الدفع بعد سنتين.
- سند قيمته الإسمية 25000 وحدة نقدية يُستحق الدفع بعد 3 سنوات.
- سند قيمته الإسمية 30000 وحدة نقدية يُستحق الدفع بعد 5 سنوات.

إتفق مع دائنه على إستبدال هذه السندات بأن يُحرر له سند واحد جديد يُستحق بعد 7 سنوات.

معدل الفائدة المركبة 4%.

المطلوب:

ماهي قيمة السند الجديد؟

الحل:

$V'_{n_1} = 10000$ وحدة نقدية , $V'_{n_2} = 25000$ وحدة نقدية , $V'_{n_3} = 30000$ وحدة نقدية

$n_1 = 2$ سنة , $n_2 = 3$ سنوات , $n_3 = 5$ سنوات , $n_4 = 7$ سنوات

$i = 6\%$

$$V'_{a_4} = V'_{a_1} + V'_{a_2} + V'_{a_3}$$

$$V'_{n_4}(1+i)^{-n_4} = V'_{n_1}(1+i)^{-n_1} + V'_{n_2}(1+i)^{-n_2} + V'_{n_3}(1+i)^{-n_3}$$

$$V'_{n_4}(1+0{,}04)^{-7} = 10000(1+0{,}04)^{-2} + 25000(1+0{,}04)^{-3} + 30000(1+0{,}04)^{-5}$$

$$V'_{n_4}(0.759917813) = 10000(0.924556213) + 25000(0.888996359) + 30000(0.821927107)$$

$$A'_{n_4} = \frac{56128{,}28432}{0{,}759917813} = \mathbf{73861} \text{ وحدة نقدية}$$

3-3- إستخدام قانون التكافؤ:

باستخدام علاقة تكافؤ الديون الطويلة الأجل، يُمكن إيجاد أي عنصر مجهول مع ضرورة معلومية باقي

مثال 8:

نريد إستبدال دين قيمته تساوي 5000 وحدة نقدية يُستحق بعد 3 سنوات بدينين، الأول قيمته 2100 وحدة نقدية يُستحق بعد سنتين والثاني قيمته 3019. معدل الفائدة المطبق هو 2.25%.

المطلوب:

ماهي مدة إستحقاق الدين الثاني الجديد؟

الحل:

$V'_{n_1} = 5000$ وحدة نقدية , $V'_{n_2} = 2100$ وحدة نقدية , $V'_{n_3} = 3049$ وحدة نقدية

$n_1 = 3$ سنوات , $n_2 = 2$ سنة

$i = 2.25\%$

$$V'_{a_2} + V'_{a_3} = V'_{a_1}$$

$$V'_{n_2}(1+i)^{-n_2} + V'_{n_3}(1+i)^{-n_3} = V'_{n_1}(1+i)^{-n_1}$$

$$2100(1+0.0225)^{-2} + 3049(1+0.0225)^{-n_3} = 5000(1+0.0225)^{-3}$$

$$2100(0.956474435) + 3049(1.0225)^{-n_3} = 5000(0.935427321)$$

$$(1.0225)^{-n_3} = \frac{2668,54}{3049} = 0.8752181 \Rightarrow (1.0225)^{n_3} = \frac{1}{0.8752181} = 1.14257235$$

وباستخدام الطريقة اللوغاريتمية يُمكن إيجاد n_4 كما يلي:

$$\log((1.025)^{n_4}) = \log(1.14257235) \Rightarrow n_4 = \frac{\log(1.14257235)}{\log(1.0225)} = 5.99004585$$

ومنه فإن مدة إستحقاق الدين الثاني الجديد هي بالتقريب **6 سنوات.**