Chapitre 2

Applications linéaires

2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1: Application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite application linéaire si elle vérifie :

(i) $\forall x, y \in E,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.

(ii) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Exemples :

1. L'application
$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-2y, 2x, y, y-x) \end{array}$$
est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^4$.

2. L'application
$$f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$$
est une application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

3. L'application
$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u_n)_n & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array}$$
est une application linéaire de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^2$.

4. L'application
$$f_4 : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \end{array}$$
est une application linéaire de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

5. L'application
$$f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (xy, x+y) \end{array}$$
est non linéaire.

Théorème 2.1: Application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ une application. Pour que f soit une application linéaire il faut et il suffit qu'on ait :

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

Remarques :

1. Si une application linéaire u est injective, on dit que u est un monomorphisme.
2. Si une application linéaire u est surjective, on dit que u est un épimorphisme.

3. Si une application linéaire u est bijective, on dit que u est isomorphisme d'espaces vectoriels et que E et F sont isomorphes.
4. Si un endomorphisme bijective est appelé un automorphisme.

Notations :

1. $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ désigne l'ensemble de toutes les applications linéaires de E vers F.
2. $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ désigne l'ensemble de toutes les endomorphismes de E.
3. $Isom(E,F)$ est l'ensemble des isomorphisme de E dans F.
4. $Aut(E)$ est l'ensemble des automorphismes de E.

Théorème 2.2

Soit f une application linéaire. On a :

(i) $f(0_E) = 0_F$;

(ii) *Si A est un sous espace vectoriel de E, alors $f_{|A}$ est une application linéaire sur A.*

(iii) $f(-x) = -f(x)$, *pour tout* $x \in E$.

(iv) $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

Théorème 2.3: Caractérisation de l'injectivité/ surjectivité d'une application linéaire par l'image d'une base

Soit f une application linéaire de E dans F. On suppose que E possède une base $(e_i)_{i\in I}$.

(i) *f est surjective si et seulement si* $F = \text{Vect}\{(f(e_i))_{i\in I}\}$.

(ii) *f est injective si et seulement si $(f(e_i))_{i\in I}$ est libre.*

(iii) *f est bijective si et seulement si $(f(e_i))_{i\in I}$ est une base de F.*

Exemples :

1. Considérons l'application :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+2y, x-y, 3x-y). \end{array}$$

Soit $\{(1,0),(0,1)\}$ une base de $\mathbb{R}^2$.Comme

$$g((1,0)) = (1,1,3), \quad g((0,1)) = (2,-1,-1)$$

et $\{(1,1,3),(2,-1,-1)\}$ est libre, alors g est injective.

2. Soit l'endomorphisme h défini par

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P+(1+X)P'. \end{array}$$

On sait que $\{1, X, X^2, X^3\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. On a

$$h(1) = 1, \quad h(X) = 1+X, \quad h(X^2) = 2X+3X^2 \quad \text{et} \quad h(X^3) = 3X^2+4X^3.$$

Puisque $\{1, 1+X, 2X+3X^2, 3X^2+4X^3\}$ est libre et $\mathrm{Card}\{1, 1+X, 2X+3X^2, 3X^2+4X^3\} = 4 \dim \mathbb{R}_3[X]$, alors $\{1, 1+X, 2X+3X^2, 3X^2+4X^3\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Par conséquent h est bijective.

Théorème 2.4: Application linéaire entre espaces vectoriels de même dimensions finies

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies égales et f une application linéaire de E dans F. Alors,

$$f \text{ est bijective} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ est injective} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ est surjective.}$$

2.2 Image et noyau d'une application linéaire

2.2.1 Image d'une application linéaire

Définition 2.2: S

it f une application linéaire de E dans F. L'ensemble

$$\mathrm{Im}(f) := \{f(x) | x \in E\} = f(E)$$

est appelé l'image de l'application linéaire f.

Exemples .

1. Considérons l'application linéaire :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y-z, y-z). \end{array}$$

On a

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \{f((x,y,z)) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(x+2y-z, y-z) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{x(1,0) + y(2,1) + z(-1,-1) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}\{(1,0), (2,1), (-1,-1)\}. \end{aligned}$$

2. Soit g l'endomorphisme défini par :

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ & P & \longmapsto & XP''. \end{array}$$

On a

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(g) &= \{g(P) \mid P \in \mathbb{R}_3[X]\} \\ &= \{XP'' \mid P := a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbb{R}_3[X]\} \\ &= \{2a_2X + 6a_3X^2 \mid a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}\{2X, 6X^2\}. \end{aligned}$$

Le fait qu'une application linéaire respecte les combinaisons linéaires entraîne qu'elle respecte aussi les sous-espaces vectoriels, au sens suivant.

Théorème 2.5: Image d'un sous espace vectoriel par une application linéaire

Soit f une application linéaire de E dans F.

- ***(i)*** *Si A est un sous espace vectoriel de E alors, $f(A)$ est un sous espace vectoriel de F. En particulier, $\mathrm{Im}(f) = f(E)$ est un sous espace vectoriel de F ;*
- ***(ii)*** *f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.*

Exemple :

Pour $n \geq 2$, soit f l'application linéaire :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_{n-2}[X] \\ & P & \longmapsto & P''. \end{array}$$

Puisque

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}(f) & = & \{P'' \mid P \in \mathbb{K}_n[X]\}, \\ & = & \{2a_2 + 6a_3X + \cdots + n(n-1)a_nX^{n-2} \mid a_2, a_3, \cdots, a_n \in \mathbb{K}\} \\ & = & \mathbb{K}_{n-2}[X], \end{array}$$

alors f est surjective.

Théorème 2.6: Image d'un Vect par une application linéaire

Soit f une application linéaire de E dans F. Pour tout partie X de E :

$$f\left(\mathrm{Vect}(X)\right) = \mathrm{Vect}\left(f(X)\right).$$

En particulier, si E possède une base $(e_i)_{i\in I}$:

$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\left\{(e_i)_{i\in I}\right\}.$$

Exemples :

1. Considérons l'application linéaire :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y-z, z-3y). \end{array}$$

Comme la famille $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ alors,

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left\{f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\right\} = \mathrm{Vect}\left\{(1,0),(2,-3),(-1,1)\right\}.$$

2. Soit g l'application linéaire définie par :

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & (a,b) & \longmapsto & a+bX+(a-b)X^2. \end{array}$$

Comme la famille $\{(1,0),(0,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ alors,

$$\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}\left\{g(1,0), g(0,1)\right\} = \mathrm{Vect}\left\{1+X^2, X-X^2\right\}.$$

2.2.2 Noyau d'une application linéaire

Définition 2.3: Noyau d'une application linéaire

Soit f une application de E dans F. L'ensemble :

$$\mathrm{Ker}(f) := f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E | f(x) = 0_E\}$$

est appelé le noyau de l'application linéaire f.

Théorème 2.7

Soit f une application linéaire de E dans F.

(i) *Si B est un sous espace vectoriel de F alors, $f^{-1}(B)$ est un sous espace vectoriel de E. En particulier, $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous espace vectoriel de E ;*

(ii) *f est injective sur E si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) := \{0_E\}$.*

Remarque :

$f^{-1}(B)$ elle a un sens même si l'application f n'est pas bijective et donc même si l'application réciproque f^{-1} n'existe pas.

Exemples :

1. L'ensemble $B := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | 2x + y - 3t = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ puisque $B = \mathrm{Ker}(f)$ où f est l'application linéaire définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & 2x + y - 3t. \end{array}$$

2. Soit $h \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\mathbb{N}})$ tel que

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (u_n) & \longmapsto & (u_{n+1} - u_n). \end{array}$$

On a

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ker}(h) & = & \{(u_{n+1} - u_n) = (0) \mid (u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}\} \\ & = & \{(u_n) \mid \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n, \} \\ & = & \{C \mid C \in \mathbb{K}\}, \end{array}$$

donc h n'est injective.

2.3 Théorème du rang

Définition 2.4: Rang d'une application linéaire

Soit f une application de E dans F. On dit que f est de rang fini si $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie, et de rang infini sinon. Si f de rang fini, on appelle rang de f, noté $\mathrm{rg}(f)$, la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

Théorème 2.8: Inégalités sur le rang

Soit f une application linéaire de E dans F.

- ***(i)*** *Si F est de dimension finie alors, f est de rang fini et $\operatorname{rg}(f) \leq \dim F$. De plus, f est surjective si et seulement si $\operatorname{rg}(f) = \dim F$.*
- ***(ii)*** *Si E est de dimension finie alors, f est de rang fini et $\operatorname{rg}(f) \leq \dim E$. De plus, f est injective si et seulement si $\operatorname{rg}(f) = \dim E$.*

Théorème 2.9: Théorème du Rang

Soit f une application linéaire de E dans F. Si E est de dimension finie alors,

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker}(f) + \operatorname{rg}(f). \tag{2.1}$$

2.4 Opérations sur les applications linéaires

Théorème 2.10: Opérations sur les applications linéaires

(i) *Une combinaison linéaire d'applications linéaires est linéaire :*

$$\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall(f,g) \in \mathcal{L}(E,F)^2 : \lambda f + \mu g \in \mathcal{L}(E,F). \tag{2.2}$$

(ii) *La composée d'applications linéaires est linéaire :*

$$\forall f \in \mathcal{L}(E,F), \forall g \in \mathcal{L}(F,G) : g \circ f \in \mathcal{L}(E,G). \tag{2.3}$$

Corollaire 2.1: $\mathcal{L}(E,F)$ comme espace vectoriel

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. $\mathcal{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le vecteur nul de $\mathcal{L}(E,F)$ est l'application nulle $\left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array}\right.$

Remarque :
$\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$.

Corollaire 2.2: $\mathcal{L}(E)$ comme anneau

$(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau (non commutatif et non intègre en général). De plus $1_{\mathcal{L}(E)} = Id_E$.

Exemples :

1. Les applications

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & (x \longmapsto xf(x)) \end{array}$$

sont deux endomorphismes de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ qui ne commutent pas.

2. Considérons

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,0) \end{array}$$

et

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (0,y). \end{array}$$

On a $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ et $g \circ f = f \circ g = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$ et pourtant $f \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$ et $g \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$.

Théorème 2.11: Propriétés des isomorphismes

(i) *Si f est un isomorphisme de E sur F, alors f^{-1} est un isomorphisme de F sur E.*
(ii) *Si f est un isomorphisme de E sur F et g un isomorphisme de F sur G, alors $g \circ f$ est un isomorphisme de E sur G.*

Exemple :

L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ z & \longmapsto & (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)) \end{array}$$

est un isomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}^2$ d'isomorphisme réciproque

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (a,b) & \longmapsto & a+ib. \end{array}$$

Corollaire 2.3: Groupe linéaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'ensemble des automorphismes de E muni de la loi $\circ$ est un groupe. On l'appelle le groupe linéaire de E et on le note $\mathrm{GL}(E)$. Plus précisément, c'est le groupe des éléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$.