Discrete Random Variables

تمهيد: عند اجراء التجربة الإحصائية (العشوائية) وتعيين فراغ العينة، لا يكون الاهتمام منصب على النتائج الممكنة في حد ذاتها وإنما يكون حول القيم العددية المرتبطة بتلك النتائج. إن القيم العددية هي ما نعبر عنها بالمتغير العشوائي. هذا الأخير والذي يرمز له بالرمز X هو اقتران أو دالة حقيقية مجال تعريفه فضاء أو فراغ العينة ومداه مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

إذن المتغير العشوائي هو المتغير الذي يتم الحصول على قيمه نتيجة لتجربة عشوائية يكون لكل قيمة من القيم التي يأخذها المتغير احتمال معين.

يأخذ المتغير العشوائي عددا محدودا (Finite Number) أو عدد غير محدود يمكن عده (Countably Infinite Number) من القيم ويسمى في هذه الحالة متغيرا عشوائيا منفصلا (Discrete Random Variable)، في حين لما يأخذ المتغير عددا لا نهائيا من القيم لا يمكن عدها يسمى بالمتغير العشوائي المتصل.

فيما يلي سوف نتناول المتغيرات العشوائية المنفصلة أو المتقطعة.

1. تعريف المتغير العشوائي: المتغير العشوائي المتقطع هو الذي يأخذ قيمة من قيم الأعداد الصحيحة؛ بمعنى أن هذه المتغيرات تأخذ عددا منتهيا من القيم الممكنة، يرمز لـ م.ع.م بشكل عام بالحرف (X) ويرمز للقيم التي يأخذها بـ (x_i) حيث يكتب كما يلي: $X = \{X = x_1, x_2, x_3.........x_n\}$.

2. التوزيع الاحتمالي (Probability distribution)

التوزيع الاحتمالي هو مجموعة القيم الممكنة مع الاحتمالات المرتبطة بقيم المتغير، يعبر عن احتمال قيمة معينة كما يلي: $P(X = x_i)$ وتكتب أيضا f_x ، هذه الأخيرة تسمى بـ دالة الكثافة الاحتمالية.

يأخذ التوزيع الاحتمالي الشكل التالي:

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
$P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	$P(X = x_3)$	$\cdots$	$P(X = x_n)$

مثال: أوجد التوزيع الاحتمالي لـ X : عدد مرات ظهور الصورة (F) من رميتين لقطعة نقد.

التجربة	PP	PF	FP	FF
ظهور F	0	1	1	2

إذن القيم التي يأخذها X هي:

$$X = \{x = 0, 1, 2\}$$

ومنه التوزيع الاحتمالي يكون كما يلي:

X	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

فالتوزيع الاحتمالي هو الجدول الذي يتضمن جميع القيم الممكنة للمتغير العشوائي مع الاحتمال الخاص لكل منها.

3.دالة الكثافة الاحتمالية

إن الاحتمال $P(X=x_i)$ يسمى بدالة الكثافة الاحتمالية ويرمز لها بالرمز $f(x)$ بحيث يجب أن تحقق شرطين:

- ✓ $f(x) \geq 0$
- ✓ $\sum_{i=1}^{n} f(x) = 1$

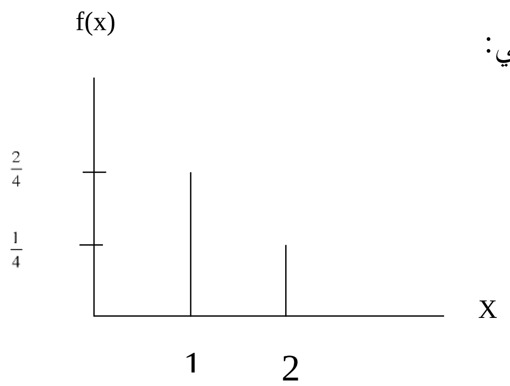
مثال: من المثال السابق أوجد $f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} ......x=0,2 \\ \frac{1}{2} ......x=1 \end{cases}$$

4.التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$

يتم تمثيل $f(x)$ من خلال قضبان متوازية على محور الفواصل كما يلي:

Diagramme en bâtons



5.دالة التوزيع F(X)

1.5.تعريف: تعرف دالة التوزيع (الدالة التجميعية) F(x) بأنها "احتمال بأن يكون x أقل أو يساوي x_i".

ومنه تعرف F(x) رياضيا كما يلي: $F(x) = P(X \leq x_i)$ ، ومنه يمكن استنتاج دالة التويع $F(x)$ من دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$ كما يلي: $F(x) = P(X \leq x_i) = \sum_{x_i \leq x} f(x)$

مثال: أوجد دالة التوزيع للمثال السابق.

$$X = \{x = 0, 1, 2\}$$

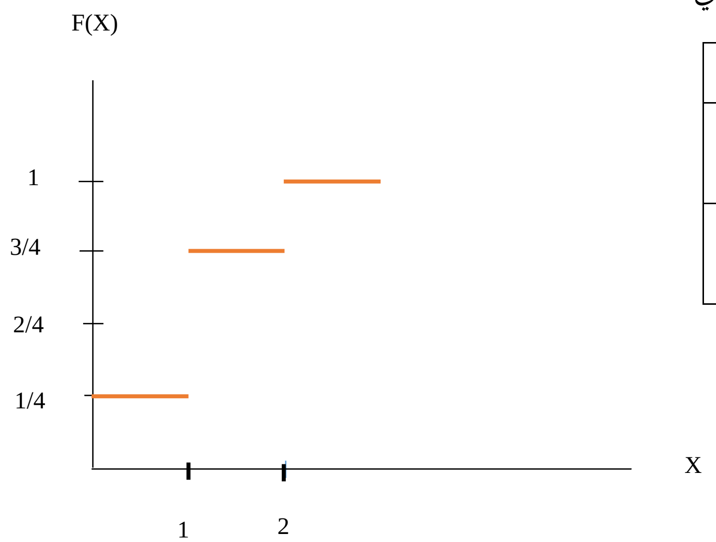
$$F(0) = P(x \le 0) = P(x = 0) = \frac{1}{4}$$

$$F(1) = P(x \le 1) = P(x = 0) + P(x = 1) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$$

$$F(2) = P(x \le 2) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

ومنه يمكن توضيح كل من $f(x)$ و $F(x)$ في الجدول التالي:

X	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$
$F(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1



ملاحظة: تأخذ دالة التوزيع $F(x)$ للمتغير العشوائي المنفصل شكلا سلميا وهي لا تكون متناقصة عند أي قيمة وأكبر قيمة ممكنة لها تساوي 1؛ أي:

$$\lim_{x \to -\infty} F(X) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} F(X) = 1$$

6. التوقع الرياضي والتباين للمتغير العشوائي المنفصل.

1.6. التوقع الرياضي E(X): تمثل القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي المنفصل مقياس النزعة المركزية، ويعرف التوقع الرياضي على أنه: $E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i . P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i . f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i . p_i$

2.6. التباين V(X): التباين هو عبارة عن توقع مربع انحرافات القيم عن توقعها الرياضي، على هذا الأساس يعرف التباين لمتغيرة عشوائية منفصلة كما يلي:

$$V(x) = E(x_i - E(x))^2$$

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(x))^2 p_i$$

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - E(x)^2$$

ملاحظة: من التباين نحدد الانحراف المعياري للمتغيرة العشوائية المنفصلة بأنه الجذر التربيعي لـ $V(x)$

$$\sigma_X = \sqrt{V(x)}$$

مثال: أحسب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري للمثال السابق.

X_i	0	1	2	$\sum$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1
$x_i p_i$	0	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$	1
$x_i^2 p_i$	0	$\frac{2}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{6}{4}$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i . p_i = 0 + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1$$

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - E(x)^2$$

$$V(X) = (0 + \frac{2}{4} + \frac{4}{4}) - (1)^2 = \frac{6}{4} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

3.6. بعض النظريات حول التوقع والتباين

التوقع	التباين
إذا كان c تمثل أي ثابت فإن: $E(cX)=cE(X)$	إذا كان c تمثل أي ثابت فإن: $V(cX)=c^2V(X)$
إذا كان a, b تمثل أي ثابتين فإن: $E(aX+b)=aE(X)+b$	إذا كان a, b تمثل أي ثابتين فإن: $V(aX+b)=a^2V(X)$
إذا كانت X,Y أي متغيرين عشوائيين فإن: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$	إذا كانت X,Y أي متغيرين عشوائيين مستقلين فإن: $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$
إذا كانت X,Y أي متغيرين عشوائيين مستقلين فإن $E(XY)=E(X).E(Y)$	إذا كانت X,Y أي متغيرين عشوائيين مستقلين فإن: $V(X-Y)=V(X)+V(Y)$

مثال: X متغير عشوائي توقعه الرياضي يساوي 50 وتباينه يساوي 70 ، فاذا كان Y=0.8+15.

المطلوب: أوجد توقع وتباين Y.

$$E(Y)=E(0.8X+15)=0.8E(X)+15=0.8(50)+15=55$$
$$V(Y)=a^2.V(X)=(0.8)^2.70=44.8$$

مثال: X متغير عشوائي توقعه الرياضي يساوي 70 وتباينه يساوي 36 .

المطلوب: أوجد الوسط الحسابي والتباين لـ:

- للمتغير Y حيث $Y=-2X+5$؛
- للمتغير Z حيث $Z=\frac{X-70}{6}$.

المتغير Y	المتغير Z
$E(Y)=aE(X)+b=-2\times70+5=-135$ $V(Y)=a^2.V(X)=(-2)^2.36=144$	$E(Z)=aE(X)+b=\frac{1}{6}\times70-\frac{70}{6}=0$ $V(Y)=a^2.V(X)=(\frac{1}{6})^2\times36=1$