

الفصل الثاني:

القائدة المركبة

والدفعات

الفائدة المركبة:

1-تعريف الفائدة المركبة:

الفائدة المركبة هي تلك الفائدة التي تُحسب على أساس أصل المبلغ مضاف إليه الفوائد المتولدة عن الفترات السابقة، وهي بهذا تختلف عن الفائدة البسيطة كون هذه الأخيرة تُحسب فقط على أساس أصل المبلغ مهما كان عدد الوحدات الزمنية.

وتُستعمل في الغالب الفائدة المركبة للاقتراض طويل الأجل بينما تُحسب الفائدة البسيطة على الاقتراض قصير الأجل.

مثال توضيحي:

تم إيداع مبلغين من المال قدر كل واحد منهما يساوي 1600 وحدة نقدية ولمدة 3 سنوات لكل منهما وأودع كلاهما بمعدل فائدة سنوي 6% لكن الأول بفائدة بسيطة والثاني بفائدة مركبة.

جدول الفائدة البسيطة:

المدة (السنة)	المبلغ في بداية المدة	الفائدة	المبلغ المتحصل (الجملة)
1	1600	$96=0.06*1600$	$1696=96+1600$
2	1600	$96=0.06*1600$	$1696=96+1600$
3	1600	$96=0.06*1600$	$1696=96+1600$

جدول الفائدة المركبة:

المدة (السنة)	المبلغ في بداية المدة	الفائدة	المبلغ المتحصل (الجملة)
1	1600	$96=0.06*1600$	$1696=96+1600$
2	1696	$101.76=0.06*1696$	$1797.76=101.76+1696$
3	1797.76	$107.87=0.06*1797.76$	$1905.63=107.87+1797.76$

2-قانون الفائدة المركبة:

لنفترض أن:

C : أصل المبلغ

i : معدل الفائدة

n : المدة بالسنوات

الفترات	رأس المال في بداية الفترة (1)	فائدة الفترة (2)	القيمة المحصلة في نهاية الفترة (الجملة) (2+1)
1	C	Ci	$C + Ci = C(1+i)$
2	$C(1+i)$	$C(1+i)i$	$C(1+i) + C(1+i)i = C(1+i)[1+i] = C(1+i)^2$
3	$C(1+i)^2$	$C(1+i)^2i$	$C(1+i)^2 + C(1+i)^2i = C(1+i)^2[1+i] = C(1+i)^3$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
n-1	$C(1+i)^{n-2}$	$C(1+i)^{n-2}i$	$C(1+i)^{n-2} + C(1+i)^{n-2}i = C(1+i)^{n-2}[1+i] = C(1+i)^{n-1}$
n	$C(1+i)^{n-1}$	$C(1+i)^{n-1}i$	$C(1+i)^{n-1} + C(1+i)^{n-1}i = C(1+i)^{n-1}[1+i] = C(1+i)^n$

نستنتج من الجدول أن القيمة المحصلة للمبلغ C بعد عدد من الوحدات الزمنية n بمعدل فائدة مركبة i لكل وحدة زمنية تُعطى بالعلاقة التالية:

$$C_n = C(1+i)^n$$

وهي تمثل القانون الأساسي للفائدة المركبة.

وقانون الفائدة المركبة يُعطي القيمة المحصلة من عملية القرض أو التوظيف (الجملة) بينما قانون الفائدة البسيطة يمدنا بالفائدة مباشرة. ولحساب الفائدة الناتجة عن قانون الفائدة المركبة فإننا نطرح أصل القرض من القيمة المحصلة له. ومنه:

$$I = C_n - C \Rightarrow I = C(1+i)^n - C \Rightarrow I = C[(1+i)^n - 1]$$

3- طرق حساب الجملة المركبة:

طريقة الحساب البحت: تقوم هذه على الحساب المباشر. ويُلاحظ أن الحاسبات العلمية تسهل العمليات الحسابية وتختصر الوقت.

طريقة الجداول المالية: إن طريقة الجداول المالية تُعد الأكثر شيوعاً واستخداماً لما توفره من وقت وتدخره من مجهودات. ولقد أُعد الجدول الأول من هذه الجداول على أساس القيمة المحصلة للوحدة النقدية الواحدة بمعدلات فائدة مركبة متغيرة ولمدد مختلفة لكل معدل منها، فإذا ما قاطعنا بين المعدل المعين والفترة المحددة نحصل على الجملة المركبة التي تنتجها وحدة نقدية واحدة موظفة بذلك المعدل وتلك المدة. ومن البديهي أنه لحساب جملة مركبة لمبلغ معين بنفس المعدل ونفس المدة ما علينا إلا أن نضرب الجملة المركبة للوحدة النقدية في ذلك المبلغ.

طريقة اللوغاريتم: يُمكن استخدام هذه الطريقة لحساب الجملة وخاصة إذا كانت الفترة كسرية أو عدم وجودها في الجداول المالية، وكذلك عدم وجود معدل الفائدة في الجداول المالية.

تذكير:

$$\log xy = \log x + \log y$$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$$

$$\log x^y = y \log x$$

مثال 1 :

أودع احد الأشخاص مبلغ من المال قدره 3500 وحدة نقدية لدى احد البنوك بمعدل فائدة مركب 6% ولمدة 7 سنوات.

المطلوب:

1- احسب جملة المبلغ؟

2- احسب الفائدة المتحصل عليها؟

الحل

وحدة نقدية $C=3500$

$i=6\%$

سنوات $n=7$

حساب جملة المبلغ:

إستخدام الجداول المالية:

$$C_n = C(1 + i)^n \Rightarrow C_7 = 3500(1 + 0.06)^7 = 3500(1.503630259)$$

حيث استخرجنا قيمة $(1.06)^7$ من الجدول المالي رقم 1.

$$C_7 = 5262.71 \text{ وحدة نقدية}$$

طريقة اللوغاريتم:

$$C_n = C(1+i)^n \Rightarrow C_7 = 3500(1.06)^7 \Rightarrow \text{Log}C_7 = \text{Log}3500(1.06)^7$$

$$\text{Log}C_7 = \text{Log}3500 + \text{Log}(1.06)^7 \Rightarrow \text{Log}C_7 = \text{Log}3500 + 7\text{Log}(1.06)$$

$$\text{Log}C_7 = 3.544068044 + 7(0.025305865) = 3.721209101$$

$$C_7 = 10^{3.721209101} = \boxed{C_7 = 5262.71 \text{ وحدة نقدية}}$$

حساب الفائدة المتحصل عليها:

يتم حساب قيمة الفائدة سواء من خلال طرح أصل المبلغ من الجملة المركبة المتحصل عليها بإحدى الطرق السابقة أو باستخدام قانون حساب الفائدة الناتجة عن قانون الفائدة المركبة. ومنه:

$$I = C_n - C \Rightarrow I = C_7 - C \Rightarrow I = 5262.71 - 3500 = \boxed{1762.71 \text{ وحدة نقدية}}$$

$$I = C[(1+i)^n - 1] = 3500[(1+0.06)^7 - 1] \quad \text{أو:}$$

$$I = 3500[(1.06)^7 - 1] = 3500[1.50363026 - 1] = \boxed{1762.71 \text{ وحدة نقدية}}$$

- إيجاد الجملة المركبة في حالة المدة غير الكاملة (تحتوي شهور و/ أو أيام):

عندما تحتوي المدة أجزاء من السنة (شهور و / أو أيام)، فإن هناك عدة طرق تساعدنا على إيجاد الجملة المركبة، نذكر منها اثنتان:

الطريقة الرياضية: وتعتمد على مبادئ الرياضيات المالية وتتمثل في استعمال الجدول المالي رقم 1 لحساب $(1+i)^n$ للسنوات الكاملة بينما تُستعمل الجداول الملحقة المخصصة للشهور أو الأيام للمدة الباقية المرافقة لعدد السنوات الكاملة. ونجد الجملة كما يلي:

$$C_{n+\frac{m}{12}} = C(1+i)^{n+\frac{m}{12}} \Rightarrow C_{n+\frac{m}{12}} = C(1+i)^n(1+i)^{\frac{m}{12}}$$

وفي حالة الأيام نستبدل $\frac{m}{12}$ بـ $\frac{j}{360}$

الطريقة البنكية: حسب هذه الطريقة المستعملة في البنوك عمليا، يتم حساب قيمة الفائدة للفترات أو السنوات الكاملة بعلاقة جملة الفائدة المركبة، أما ما يتعلق بالأيام أو الشهور فتُستعمل علاقة الفائدة البسيطة.

$$C_{n+\frac{m}{12}} = C(1+i)^n + C(1+i)^n i \frac{m}{12}$$

وفي حالة الأيام نستبدل $\frac{m}{12}$ بـ $\frac{j}{360}$

مثال 2:

أودع احد الأشخاص مبلغ من المال قدره 3200 وحدة نقدية لدى احد البنوك بمعدل فائدة مركب 7.5% لمدة 3 سنوات و5 أشهر.

المطلوب: احسب الجملة بالطريقة الرياضية وبالطريقة البنكية؟

الحل

$$C = 3200$$

$$i = 7.5\%$$

$$n = 3, m = 5$$

الطريقة الرياضية:

$$C_{n+\frac{m}{12}} = C(1+i)^n(1+i)^{\frac{m}{12}} = 3200(1.075)^3(1.075)^{\frac{5}{12}}$$

من الجدول المالي رقم 1 نستخرج قيمة $(1.075)^3$ ومن الجدول المالي رقم 6 نستخرج قيمة $(1.075)^{\frac{5}{12}}$ ومنه:

$$C_{3+\frac{5}{12}} = 3200(1,242296875)(1,030592221) = \boxed{4096,96 \text{ وحدة نقدية}}$$

الطريقة البنكية:

$$C_{n+\frac{m}{12}} = C(1+i)^n + C(1+i)^n i \frac{m}{12} \Rightarrow C_{3+\frac{5}{12}} = 3200(1,075)^3 + 3200(1,075)^3 \frac{7,5}{100} \frac{5}{12}$$

من الجدول المالي رقم 1 نستخرج قيمة $(1.075)^3$. ومنه:

$$C_{3+\frac{5}{12}} = 3200(1.242296875) + 3200(1.242296875) \times \frac{7.5}{100} \times \frac{5}{12} = \boxed{4099.58 \text{ وحدة نقدية}}$$

ويلاحظ أن هناك فرق بسيط بين نتيجتي الطريقتين.

- إيجاد الجملة المركبة في حالة المعدل غير مجدول: عندما يكون معدل الفائدة المركب غير موجود في الجدول المالي، فإنه يُمكن إتباع طريقة الحساب البحث والطريقة اللوغاريتمية.

مثال 3:

بالطريقة اللوغاريتمية أوجد جملة مبلغ قدره 2000 وحدة نقدية وُظف لمدة 5 سنوات بمعدل فائدة مركب سنوي 5.8%.

الحل:

$$C = 2000$$

$$i = 5.8\%$$

$$n = 5$$

$$C_n = C(1+i)^n \Rightarrow C_5 = 2000(1.058)^5 \Rightarrow \text{Log} C_5 = \text{Log} 2000 + 5 \text{Log} (1.058)$$

$$\text{Log} C_5 = \text{Log} 2000 + \text{Log} (1.058)^5 \Rightarrow \text{Log} C_5 = \text{Log} 2000 + 5 \text{Log} (1.058)$$

$$\text{Log} C_5 = 3.30103 + 5(0.02448567) = 3.42345835$$

$$C_5 = 10^{3.42345835} = \boxed{C_5 = 2651.30 \text{ وحدة نقدية}}$$

- إيجاد الجملة في حالة المعدل يُحسب على أساس جزء من السنة: إذا كان معدل الفائدة يُحسب على أساس جزء من السنة (سداسي، ثلاثي،... الخ) فإنه في هذه الحالة نقوم بضرب عدد المرات التي يُطبق فيها المعدل في السنة في عدد السنوات.

مثال 4:

اوجد جملة مبلغ قدره 5200 وحدة نقدية وُظف لمدة 3 سنوات بمعدل فائدة مركب نصف سنوي 2.5%.

الحل:

$$C = 5200$$

$$i = 2.5\%$$

نلاحظ أن معدل الفائدة المركب يُحسب على أساس سداسي وبالتالي فإن عدد المرات التي يُحسب فيها المعدل هو مرتين في السنة وبالتالي 6 مرات في 3 سنوات ومنه: $n=6$

$$C_n = C(1+i)^n \Rightarrow C_6 = 5200(1+0.025)^6 = 5200(1.15969342)$$

$$C_6 = 6030.41 \text{ وحدة نقدية}$$

4- عمليات على القانون الأساسي للفائدة المركبة:

1- أصل المبلغ مجهول : انطلاقاً من القانون الأساسي للفائدة المركبة، يُمكن إيجاد قيمة المبلغ في بداية المدة ويُدعى أيضاً بالقيمة الحالية للجملة مع ضرورة معلومية باقي العناصر.

$$C_n = C(1+i)^n \implies C = \frac{C_n}{(1+i)^n} \implies \boxed{C = C_n(1+i)^{-n}}$$

ويتم استخدام الجدول المالي رقم 2 لاستخراج المقدار $(1+i)^{-n}$ ومن تم إيجاد قيمة أصل المبلغ.

ويُمكن أيضاً استخدام الطريقة اللوغاريتمية.

كما يُمكن استخدام الجدول المالي رقم 1 لإيجاد أصل المبلغ في حالة استخدام الصيغة التالية:

$$C = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

مثال 5:

أودع أحد الأشخاص مبلغاً من المال لدى أحد البنوك بمعدل فائدة مركب 5.75% ولمدة 8 سنوات ليحصل في نهاية المدة على جملة مركبة قدرها 2450 وحدة نقدية.
المطلوب: ما هو المبلغ الذي أودعه هذا الشخص؟

الحل

$$C_8 = 2450$$

$$i = 5.75\%$$

$$n = 8$$

$$C = C_n(1+i)^{-n} \Rightarrow C = 2450(1.0575)^{-8} \Rightarrow C = 2450(1.0575)^{-8} \Rightarrow C = 2450(0.63937697)$$

$C = 1566.47$ وحدة نقدية

2- معدل الفائدة مجهول: لإيجاد معدل الفائدة، مع معلومية باقي العناصر، يمكننا استخدام الطريقة اللوغاريتمية أو الجداول المالية.

الطريقة اللوغاريتمية: يُمكن إيجاد معدل الفائدة بالطريقة اللوغاريتمية كما يلي:

$$C_n = C(1+i)^n \Rightarrow \text{Log}C_n = \text{Log}C + n\text{Log}(1+i) \Rightarrow$$

$$\text{Log}(1+i) = \frac{\text{Log}C_n - \text{Log}C}{n} \Rightarrow \boxed{i = 10^{\left(\frac{\text{Log}C_n - \text{Log}C}{n}\right)} - 1}$$

إستخدام الجداول المالية: يُمكن هنا الاستعانة بالجدول المالية لإيجاد معدل الفائدة كما يلي:

$$C_n = C(1+i)^n \Rightarrow \boxed{(1+i)^n = \frac{C_n}{C}}$$

وبعد ذلك نبحث عن القيمة الناتجة عن تقسيم الجملة على أصل المبلغ أي $\frac{C_n}{C}$ في الجدول المالي رقم 1 في السطر الذي يقابل المدة n (معلومة). ونكون هنا أمام حالتين:

الحالة الأولى: وجود حاصل قسمة $\frac{C_n}{C}$ ، والمعدل المقابل في العمود هو المعدل المطلوب.

الحالة الثانية: في حالة عدم وجود حاصل قسمة $\frac{C_n}{C}$ في الجدول المالي فإننا نقوم بتطبيق الخطوات التالية:

- نحدد القيمتين في الجدول المالي التي يقع بينهما حاصل قسمة $\frac{C_n}{C}$ في السطر التي تقع فيه المدة المعلومة، ونرمز للقيمة الكبرى بـ x_1 والقيمة الصغرى بـ x_2 .

- نحدد معدلي الفائدة الذين يقابلان القيمتين المتحصل عليهما في الخطوة السابقة، ونرمز للمعدل الذي يقابل x_1 بـ i_1 والمعدل الذي يقابل x_2 بـ i_2 .
ويتم إيجاد معدل الفائدة بالتناسب كما يلي:

$$i = \frac{(i_1 - i_2) \times \left(\frac{C_n}{C} - x_2\right)}{(x_1 - x_2)} + i_2$$

مثال 6:

أودع احد الأشخاص مبلغا من المال لدى احد البنوك قدره 1550 وحدة نقدية ولمدة 5 سنوات ليتحصل في النهاية على جملة قدرها 2330.67 وحدة نقدية.

المطلوب: اوجد معدل الفائدة المركب الذي وُظف به المبلغ باستخدام الجداول المالية؟

الحل

$$C_5 = 2330.67$$

$$C = 1550$$

$$n = 5$$

$$(1 + i)^n = \frac{C_n}{C} \implies (1 + i)^5 = \frac{2330.67}{1550} = 1.503658065$$

نقوم بالبحث عن القيمة المتحصل عليها في الجدول المالي رقم 1 عند السطر الذي يقابل 5 سنوات ونجد هذه القيمة عند المعدل 8.5%، إذا:

$$i = 8.5\%$$

مثال 7:

أقترض احد الأشخاص مبلغا من المال قدره 2000 وحدة نقدية لمدة 4 سنوات ليتحصل في النهاية على جملة قدرها 2705.89 وحدة نقدية.

المطلوب: اوجد معدل الفائدة المركب؟

الحل

$$C = 2000$$

$$C_4 = 2705.89$$

$$n = 4$$

$$(1 + i)^n = \frac{C_n}{C} \Rightarrow (1 + i)^4 = \frac{2705,89}{2000} = 1,352945$$

وعند البحث في الجدول المالي رقم 1 عند السطر المقابل لـ $n=4$ فإننا لا نجد حاصل القسمة وبالتالي نلجأ إلى طريقة التناسب كما يلي:

نبحث عن القيمتين اللتين تحصران حاصل قسمة $\frac{C_n}{C}$ في السطر حيث نجد:

$$x_1 = 1.36048896, x_2 = 1.347935513$$

معدلي الفائدة المقابلين للقيمتين السابقتين هما:

$$i_1 = 8\%, i_2 = 7.75\%$$

$$i = \frac{(i_1 - i_2) \times \left(\frac{C_n}{C} - x_2\right)}{(x_1 - x_2)} + i_2 \Rightarrow i = \frac{(0.08 - 0.0775) \times (1.352945 - 1.34793551)}{(1.36048896 - 1.34793551)} + 0.0775$$

$$i = 0.07849 = 7.849\% = \boxed{7.85\%}$$

3- المدة مجهولة: لإيجاد مدة الإيداع أو مدة الإقتراض مع معلومية باقي العناصر يمكننا استخدام الطريقة اللوغاريتمية أو الجداول المالية.

الطريقة اللوغاريتمية: يُمكن إيجاد المدة بالطريقة اللوغاريتمية كما يلي:

$$C_n = C(1+i)^n \Rightarrow \text{Log}C_n = \text{Log}C + n\text{Log}(1+i) \Rightarrow \boxed{n = \frac{\text{Log}C_n - \text{Log}C}{\text{Log}(1+i)}}$$

إستخدام الجداول المالية: يُمكن هنا الاستعانة بالجدول المالية لإيجاد المدة كما يلي:

$$C_n = C(1+i)^n \Rightarrow \boxed{(1+i)^n = \frac{C_n}{C}}$$

وبعد ذلك نبحث عن القيمة الناتجة عن تقسيم الجملة على أصل المبلغ أي $\frac{C_n}{C}$ في الجدول المالي رقم 1 في العمود الذي يقابل المعدل المعلوم، وهنا نكون أمام حالتين:

الحالة الأولى: وجود حاصل قسمة $\frac{C_n}{C}$ ، والمدة المقابلة في السطر هي المدة المطلوبة.

الحالة الثانية: في حالة عدم وجود حاصل قسمة $\frac{C_n}{C}$ في الجدول المالي رقم 1 فإننا نقوم بتطبيق الخطوات التالية:

نحدد القيمتين في الجدول المالي التي يقع بينهما حاصل قسمة $\frac{C_n}{C}$ في العمود التي يقع فيه المعدل المعلوم، ونرمز للقيمة الكبرى بـ x_1 والقيمة الصغرى بـ x_2 .

ويتم إيجاد عدد الأيام بالتناسب كما يلي:

$$j = \frac{\left(\frac{C_n}{C} - x_2 \right) \times 360}{(x_1 - x_2)}$$

ومنه فإن المدة المطلوبة تكون عبارة عن المدة التي تقابل القيمة الصغرى x_2 مضافا إليها عدد الأيام المتحصل عليه من تطبيق القانون السابق.

مثال 8:

أودع احد الأشخاص مبلغا من المال لدى احد البنوك قدره 100000 وحدة نقدية بمعدل فائدة 8% ليتحصل في النهاية على جملة قدرها 199900.463 وحدة نقدية.

المطلوب: اوجد المدة التي وُظف بها المبلغ باستخدام الجداول المالية؟

الحل

$$C_n = 199900.463$$

$$C = 100000$$

$$i = 8\%$$

$$(1 + i)^n = \frac{C_n}{C} \implies (1.08)^n = \frac{199900.463}{100000} = 1.99900463$$

نقوم بالبحث عن القيمة المتحصل عليها في الجدول المالي رقم 1 عند العمود الذي يقابل معدل 8% ونجد هذه القيمة عند $n=9$ إذا:

$$n = 9 \text{ سنوات}$$

مثال 9:

أودع احد الأشخاص مبلغا من المال لدى احد البنوك قدره 4945 وحدة نقدية بمعدل فائدة 8% ليتحصل في النهاية على جملة قدرها 6794.88 وحدة نقدية.

المطلوب: اوجد المدة التي وُظف بها المبلغ باستخدام الجداول المالية؟

الحل

$$C = 4945$$

$$C_n = 6794.88$$

$$i = 8\%$$

$$(1 + i)^n = \frac{C_n}{C} \Rightarrow (1.08)^n = \frac{6794.88}{4945} = 1.374091001$$

$$j = \frac{\left(\frac{C_n}{C} - x_2\right) \times 360}{(x_1 - x_2)} \Rightarrow j = \frac{(1.374091001 - 1.36048896) \times 360}{(1.46932808 - 1.36048896)}$$

$$j = 44.99 \approx \boxed{45 \text{ يوما}}$$

ومنه فإن المدة الذي وُظف بها المبلغ هي 4 سنوات و 45 يوما.