

Chapitre 2

La théorie de la stabilité d'un système non linéaire

2.1 Introduction

Dans les études mathématiques de la stabilité on procède généralement avec un modèle mathématique de la dynamique du système et on étudie si le système possède la propriété de stabilité. Avec cette approche, on peut s'assurer que le modèle est stable ou non. Les conclusions concernant la stabilité du modèle ne s'appliquent pas au système physique réel que si le modèle utilisé est assez précis. La théorie de la stabilité joue un rôle central en théorie des systèmes ; différents types de problèmes de stabilité peuvent être rencontrés dans l'étude des systèmes dynamiques.

L'objet de la théorie de la stabilité est de tirer des conclusions quant au comportement du système sans calculer explicitement ses trajectoires. La contribution majeure fut apportée par A.M. Lyapunov, en 1892, dont les travaux n'ont été connus qu'à partir des années 60. Il a introduit la majorité des concepts et définitions de base concernant la stabilité des systèmes représentés par des systèmes différentiels arbitraires mais a aussi fourni les principaux résultats théoriques. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à quelques notions particulières de stabilité. En particulier, on cite la stabilité au sens de Lyapunov et la stabilité au sens de Routh-Hurwitz.

2.2 Théorème de Hartman-Grobman

En mathématiques, dans l'étude des systèmes dynamiques, le théorème de **Hartman-Grobman** ou théorème de linéarisation est un théorème important concernant le comportement local des systèmes dynamiques au voisinage d'un point d'équilibre hyperbolique[38] [39].

Soit le système dynamique :

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.1)$$

Définition 2.1 Deux flots φ_t et ψ_t sont dits topologiquement équivalents dans des voisinages de points d'équilibre, s'il existe un homeomorphisme h qui envoie le point d'équilibre du premier flot en le point d'équilibre du deuxième flot et qui conjugue les flots, c'est à dire $h \circ \varphi_t = \psi_t \circ h$.

Théorème 2.1 (Hartman-Grobman). Considérons un système (2.1), de flot φ_t . Si x^* est un point d'équilibre hyperbolique, alors il existe un voisinage V de x^* sur lequel le flot φ_t est topologiquement équivalent au flot du linéarisé du système en x^* .

En d'autres termes le théorème signifie que dans le voisinage V d'un point d'équilibre, les orbites d'un système peuvent être déformées continuellement dans les orbites de son linéarisé. En particulier, si toutes les valeurs propres du linéarisé sont de parties réelles strictement négatives, alors toutes les solutions issues du voisinage V tendent vers l'équilibre lorsque $t \rightarrow +\infty$. De la même manière, lorsque toutes les valeurs propres sont de parties réelles strictement positives, alors toutes les solutions issues du voisinage V tendent vers l'équilibre lorsque $t \rightarrow -\infty$.

Exemple 2.1 Considérons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} x' &= x(1 - \frac{x}{2}) - xy \\ y' &= xy - y \end{cases} \quad (2.2)$$

avec

$$\begin{cases} f_1(x, y) &= x(1 - \frac{x}{2}) - xy \\ f_2(x, y) &= xy - y. \end{cases}$$

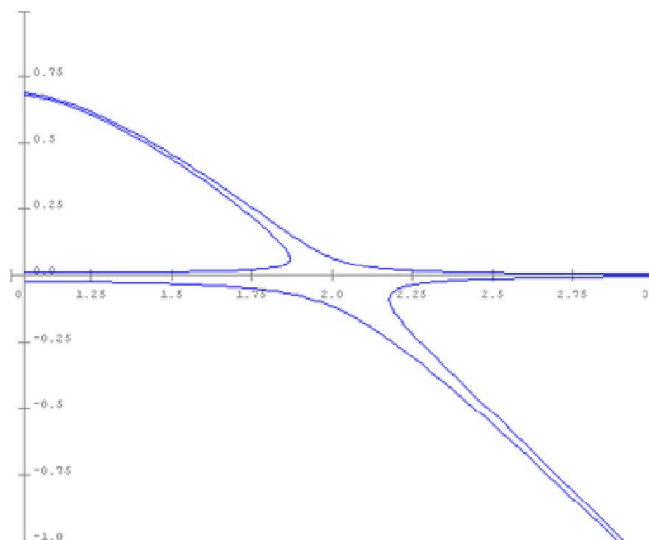


FIG. 2-1 – Portrait de phase du système (2.2)

Ce système admet trois points équilibres : $(0,0)$, $(2,0)$ et $(1, 1/2)$. On va étudier le comportement des trajectoires de ce système autour de l'équilibre $(2,0)$.

Pour cela, on calcule la matrice jacobienne f en $(2,0)$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont -1 et 1 ; l'équilibre $(2,0)$ est donc hyperbolique. Concernant le comportement du système linéaire, l'étude du portrait de phase nous indique que l'équilibre est un point-selle, voir figure (Fig 2 – 2). L'utilisation du théorème de linéarisation nous indique qu'au voisinage de $(2,0)$, le système (2.2) se comporte de la même manière, voir figure (Fig 2 – 1).

2.3 Théorie de Lyapounov

Nous avons vu qu'un point singulier pour lequel la matrice du linéarisé a des valeurs propres à partie réelle négative est asymptotiquement stable. Si certaines des valeurs propres ont des parties réelles positives, le point est instable. Mais qu'en est-il dans les autres cas ? Beaucoup

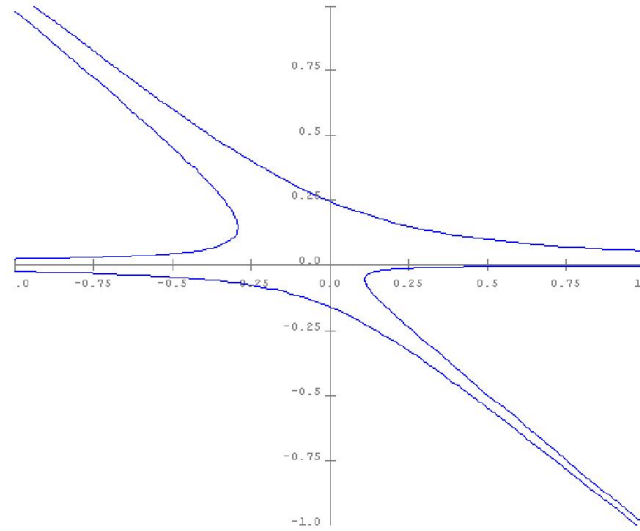


FIG. 2-2 – Portrait de phase du système linéarisé.

de situations peuvent se produire et il n'existe pas de méthode générale permettant de conclure dans tous les cas, mais plutôt un certain nombre de méthodes ad hoc. La méthode de Lyapunov en est une. Elle est très importante parce qu'elle permet de conclure dans plusieurs cas où les autres méthodes ne fonctionnent pas.

Définition 2.2 (Fonction de classe $\mathcal{K}$)[30]. Une fonction continue $\alpha : [0, a[\rightarrow [0, +\infty[$ est dite de classe $\mathcal{K}$, si elle est strictement croissante et $\alpha(0) = 0$. Elle est dite de classe $\mathcal{K}_\infty$, si de plus, on a $a = +\infty$ et $\alpha(r) \rightarrow +\infty$ quand $r \rightarrow +\infty$.

Définition 2.3 (Fonction de classe $\mathcal{KL}$). Une fonction continue $\beta : [0, a[\times [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ est dite de classe $\mathcal{KL}$, si pour tout s fixé, l'application $r \mapsto \beta(r, s)$ est de classe $\mathcal{K}$ et pour tout r fixé, l'application $s \mapsto \beta(r, s)$ est décroissante et $\beta(r, s) \rightarrow 0$ quand $s \rightarrow +\infty$.

une autre reformulation [30] des notions de stabilité utilisant les fonctions de classe $\mathcal{K}$ et $\mathcal{KL}$

Proposition 2.1 L'origine $x = 0$ est un point d'équilibre

i. Uniformément stable si et seulement si il existe une fonction $\alpha(\cdot)$ de classe $\mathcal{K}$ et une constante positive c indépendante de t_0 telle que,

$$\|x(t)\| \leq \alpha(\|x_0\|), \forall t \geq t_0 \geq 0, \forall \|x_0\| < c.$$

Chapitre 2. La théorie de la stabilité d'un système non linéaire

ii. Globalement uniformément stable si et seulement si l'inégalité précédente est satisfaite pour toute condition initiale x_0 .

Proposition 2.2 *L'origine $x = 0$ est un point d'équilibre*

i. Uniformément asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une fonction $\beta(.,.)$ de classe $\mathcal{KL}$ et une constante positive c indépendante de t_0 telle que,

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x_0\|, t - t_0), \forall t \geq t_0 \geq 0, \forall \|x_0\| < c.$$

ii. Globalement uniformément asymptotiquement stable si et seulement si l'inégalité précédente est satisfaite pour toute condition initiale x_0 .

Proposition 2.3 *L'origine $x = 0$ est un point d'équilibre*

i. Exponentiellement stable si et seulement si l'inégalité précédente est satisfaite avec

$$\beta(r, s) = kre^{-\gamma s}, k > 0, \gamma > 0, \forall \|x_0\| < c.$$

ii. Globalement exponentiellement stable si et seulement si l'inégalité précédente est satisfaite pour toute condition initiale x_0 .

Définition 2.4 *Une fonction continue $V : R^+ \times R^n \rightarrow R^+$ est dite :*

- Définie positive, s'il existe une fonction α de classe $\mathcal{K}$, telle que $\forall t \geq 0, \forall x \in R^n, V(t, x) \geq \alpha(\|x\|)$.

- Définie positive et radialement non-bornée (ou propre), si l'inégalité précédente est vérifiée pour tout $x \in R^n$ avec une fonction α de classe $\mathcal{K}_\infty$. limitée ou decrescent, s'il existe une fonction γ de classe $\mathcal{K}$, telle que

$$\forall t \geq 0, \forall x \in R^n, V(t, x) \leq \gamma(\|x\|).$$

2.3.1 La fonction de Lyapunov

On considère le système autonome défini par[24] :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t) \\ f(x_0) = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Définition 2.5 Une fonction $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur un voisinage U de x_0 , et différentiable sur $U - \{x_0\}$ telle que :

- $V(x_0) = 0$ et $V(x) > 0$ si $x \neq x_0$

- $\dot{V}(x) = f.V(x) \leq 0 \quad \forall x \in U$ où $f.V(x) = \left. \frac{d}{dt} V f_t(x) \right|_{t=0}$ est appelée fonction de Lyapounov large pour (2.3) en x_0 .

Si de plus la fonction vérifie la condition :

$\dot{V}(x) < 0, \forall x \in U - \{x_0\}$ alors V est appelée fonction de Lyapounov stricte pour (2.3) en x_0 .

Théorème 2.2 (Lyapounov)

Si le système (2.3) admet une fonction de Lyapounov large (resp. stricte) alors x_0 est un point d'équilibre stable (resp. asymptotiquement stable) pour le système considéré.

Théorème 2.3 Soit $x = 0$ un point d'équilibre du système (2.3) et $U(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$ Soit $V : \mathbb{R}^+ \times U(0) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle qu'il existe des fonctions de classe $\mathcal{K}$ α_1, α_2 et α_3 définies sur $[0, r[$ vérifiant : $\forall t \geq t_0$ et $\forall x \in U(0)$,

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

$$\dot{V}(t, x) \leq -\alpha_3(\|x\|).$$

Alors, $x = 0$ est un point d'équilibre uniformément asymptotiquement stable. Si $U(0) = \mathbb{R}^n$ et α_1 et α_2 sont de classe $\mathcal{K}_\infty$, alors $x = 0$ est un point d'équilibre globalement uniformément asymptotiquement stable.

Théorème 2.4 Considérons le système (2.3). Supposons que ce système admette une fonction de Lyapounov $V(t, x)$ et supposons qu'il existe des constantes c_1, c_2, c_3 et $c_4 > 0$, telles que, $\forall x \in U(0), \forall t \geq t_0$ on a :

$$c_1 \|x\|^2 \leq V(t, x) \leq c_2 \|x\|^2$$

$$\dot{V}(t, x) \leq -c_3 \|x\|^2$$

$$\left\| \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right\| \leq c_4 \|x\|,$$

alors, $x = 0$ est un point d'équilibre exponentiellement stable. Si $U(0) = \mathbb{R}^n$, alors l'origine est un point d'équilibre globalement exponentiellement stable.

Exemple 2.2 Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 2(x_2)^4 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

$x = 0$ est un point d'équilibre. Soit $V(x) = 6x_1^2 + 12x_2^2 + 4x_1x_2^4 + x_2^8$.

On peut écrire cette quantité sous la forme :

$$V(x) = (2x_1 + x_2^4)^2 + 2x_1^2 + 12x_2^2$$

Elle est donc définie positive, de plus

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} \dot{x}_2$$

On vérifie que

$$\dot{V}(x) = -24(x_1^2 + x_2^2)$$

$\dot{V}(x)$ est donc définie négative, V est une fonction de Lyapunov, et le théorème de Lyapunov permet de conclure que le point d'équilibre $x = 0$ est globalement asymptotiquement stable.

Pour prouver les propriétés de stabilité d'un système, de nombreuses méthodes sont basées sur le théorème de Lyapunov, pour les systèmes autonomes, il est possible de prouver la stabilité asymptotique quand $\dot{V}(x) \leq 0$ en considérant le théorème d'invariance de LaSalle

Théorème 2.5 [58] (Théorème de LaSalle) Le point d'équilibre $x = x_{eq}$ de (2.3) est asymptotiquement stable s'il existe une fonction $V(x)$ de $D \rightarrow \mathbb{R}$ continument différentiable ayant les propriétés suivantes :

$$- \dot{V}(x) \leq 0, \quad \forall x \neq 0$$

$$- S = \{x : \dot{V}(x) = 0\}$$

Ou :

$$- D \text{ est un ensemble ouvert de } \mathbb{R}^n \text{ et } x_{eq} \in D,$$

$$- V(x) \geq V(x_{eq}) \quad \forall x \neq 0 \text{ dans } D, \quad (V(x) \text{ est minimale en } x_{eq}),$$

$$- \dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in D,$$

$$- L'ensemble S \subset D \text{ tel que } \dot{V}(x) = 0 \text{ ne contient pas de trajectoires du système } x(t) = x_{eq}.$$

Alors, pour toute condition initiale $x_0 \in D$, la solution de (2.3) reste dans D , est définie pour tout temps $t > 0$ et converge vers le plus grand sous-ensemble invariant inclus dans S [56], [57], [58]. Le théorème d'invariance de LaSalle, s'applique aussi bien aux points d'équilibres qu'aux cycles limites.

Concept de passivité et fonction de Lyapunov

Un système est passif lorsque la puissance soutirée se fait au détriment du stock interne d'énergie. Ainsi, il ne peut pas y avoir de génération interne de puissance. L'idée est de considérer des systèmes pour lesquels la dissipation est positive ou nulle. En d'autres termes lorsque la puissance est injectée la puissance en entrée positive elle est soit stockée soit dissipée et lorsque le système restitue de la puissance en entrée négative, elle est fournie par le stock interne. Il n'y a pas de génération interne de puissance [59] [60], [58].

Définissons la fonction de Lyapunov pour un système sans entrée :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ \dot{V}(x) \leq 0 \end{cases}$$

Tandis que la passivité pour système entrée-sortie est :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ \dot{V}(x) \leq \text{puissance fournie} \\ y = h(x) \end{cases}$$

Chapitre 2. La théorie de la stabilité d'un système non linéaire

La Passivité permet d'obtenir des contrôleurs robustes qui ont une interprétation physique claire en termes d'interconnexions du système avec son environnement. En particulier, l'énergie totale du système en boucle fermée est la différence entre l'énergie du système et l'énergie fournie par le contrôleur .

Contrôle Basé sur la théorie de Lyapunov

Considérons le système autonome avec entrée suivant :

$$\dot{x} = f(x, u)$$

Où x est le vecteur d'état du système et u est la loi de commande à l'entrée, procédons déferrement, notre objectif est de trouver une loi de commande qui ramène le système au point d'équilibre $x = 0$, soit $u = k(x)$ tel que $x = 0$ est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système à boucle de retour fermé $\dot{x} = f(x, k(x))$.

Pour démontrer le critère de stabilité globalement asymptotiquement stable (GAS), on a besoin de construire une fonction de Lyapunov $V(x)$, qui satisfait les conditions des théorèmes précédents, la conception de la loi de contrôle $u = k(x)$ associée avec la fonction de Lyapunov est ce qu'on appelle un contrôle basée sur la théorie de Lyapunov.

Une approche simple de trouver $u = k(x)$ est de prendre une fonction définie positive, bornée $V(x)$, et choisir $k(x)$ telle que $\dot{V}(x) = V(x)f(x) < 0, \forall x \neq 0$.

Pour réussir dans cette approche $V(x)$ doit être soigneusement choisie.

Définition 2.6 *Une fonction définie positive, bornée $V(x)$ est appelée un contrôle basé sur la fonction de Lyapunov si :*

$$\inf V(x)f(x) < 0 \quad \forall x \neq 0$$

On peut donc trouver une loi de contrôle assurant une stabilité globale du système par le théorème d'Artstein [61]

Théorème 2.6 (théorème d'Artstein) *Un système dynamique a une loi de contrôle basée sur*

la fonction de Lyapunov si et seulement si il existe une fonction de stabilisation régulière dans la boucle de retour (feedback) $u(x)$.

2.4 Le critère de Routh-Hurwitz

Pour démontrer qu'un point d'équilibre est asymptotiquement stable, il faut donc a priori calculer les n valeurs propres λ_i de A et vérifier que $\forall i \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$. Une méthode algébrique a été développée par Routh-Hurwitz, basée sur le calcul des déterminants particuliers dits déterminants de Routh-Hurwitz.

Supposons le système :

$$\dot{x} = \phi(x)$$

Son linéarisé s'écrit :

$$\dot{x} = Ax$$

Les valeurs propres de A sont solutions de l'équation caractéristique :

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \iff \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

Les déterminants de Routh-Hurwitz sont définis de la manière suivante :

$$H_1 = |a_1|$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$H_j = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2j-1} & a_{2j-2} & a_{2j-3} & \cdots & a_j \end{vmatrix}$$

Proposition 2.4 Dans le cas d'une matrice de dimension n , les termes h_{jk} des déterminants de Routh-Hurwitz sont définis de la manière suivante :

- * $h_{jk} = a_{2j-k}$ pour $0 \leq 2j - k \leq n$
- * $h_{jk} = 1$ pour $2j = k \iff 2j - k = 0$
- * $h_{jk} = 0$ pour $2j < k \iff 2j - k < 0$ ou $2j > n + k \iff 2j - k < n$

Proposition 2.5 Le point d'équilibre $\bar{x}$ est asymptotiquement stable

$$\iff \forall \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \iff \forall \operatorname{Re}(H_i) > 0$$

Théorème 2.7 (Critère de Routh-Hurwitz)

Soit $p(\lambda)$ un polynôme tel que $a_0 > 0$.

Pour que P soit uniformément asymptotiquement stable (u. a. s), il faut que les déterminants principaux de la matrice de Hurwitz soient strictement positif.

2.4.1 Critère de Routh-Hurwitz dans $\mathbb{R}^3$

Considérons le système :

$$\dot{x} = Ax$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

L'équation caractéristique est :

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0.$$

Les déterminants de Routh-Hurwitz sont :

$$H_1 = |a_1| = a_1$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_3$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = a_3H_2$$

Ainsi les conditions de stabilité du point d'équilibre sont :

$$H_1 > 0, H_2 > 0 \text{ et } H_3 > 0.$$

Donc le point est asymptotiquement stable.

Exemple 2.3 $f(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$

La matrice d'Hurwitz s'écrit :

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$$

donc le critère de Routh-Hurwitz s'écrit :

$$\begin{cases} H_3 = a_1a_2a_3 - a_3^2 > 0, \\ H_2 = a_1a_2 - a_3 > 0, \\ H_1 = a_1 > 0. \end{cases}$$

Ces hypothèses se réduisent donc dans le cas $n = 3$ à :

$$a_1 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 - a_3 > 0$$

Critère de Routh-Hurwitz en dimension 3

Si $a_1 > 0, a_2 > 0, a_1 a_2 - a_3 > 0$, alors les racines du polynôme

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

sont à parties réelles négatives.

2.5 Conclusion

La notion de stabilité constitue une problématique centrale de la théorie du contrôle. Souvent liée à la façon d'appréhender un système, la stabilité possède un large éventail de définitions [32]. Dans le présent chapitre, nous avons présenté les principales méthodes proposées dans la littérature pour l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques à comportement chaotiques ; La méthode de Lyapunov et la méthode de Routh-Hurwitz.

Chapitre 3

Contrôle du chaos

3.1 Introduction

La sensibilité aux conditions initiales des systèmes chaotiques a fait du chaos une situation indésirable pendant plusieurs années.

Cependant, mis à part cette caractéristique, l'attracteur d'un système chaotique contient un ensemble infini d'orbites périodiques instables, durant son évolution dans le temps, le système va visiter un petit voisinage de chaque point de chacune des orbites périodiques (instables) dans l'attracteur, c'est-à-dire que l'on peut décrire une dynamique chaotique comme une suite erratique de sauts d'une orbite périodique à une autre. De ces importantes propriétés est née l'idée du contrôle du chaos.

On considère le système dynamique continu défini par :

$$\dot{x} = F(x, u) \tag{3.1}$$

Où x est un vecteur de dimension n d'une variable d'état, u est un vecteur de variable de contrôle (l'entrée(input)). On pose que $F(x, u)$ est continuellement différentiable. Si des perturbations extérieures sont présentes, plusieurs modèles généraux de variation de temps seront considérés

$$\dot{x} = F(x, u, t)$$

Chapitre 3. Contrôle du chaos

le vecteur de dimension l de la variable de sortie (output) y est définie par exemple par :

$$y = h(x)$$

Si la sortie (output) n'est pas définie explicitement, on peut supposer que toutes les variables d'état sont disponibles pour $y = x$.

Dans le modèle discret, on considère

$$x_{k+1} = F_d(x_k, u_k)$$

où $x_k \in \mathbb{R}^n, u_k \in \mathbb{R}^m, y_k \in \mathbb{R}^l$, le vecteur d'état, le vecteur d'entre et le vecteur de sortie à k -ième itération respectivement.

Le contrôle d'un système chaotique a pour but la stabilisation d'orbite périodique instable. Soit $\hat{x}(t)$ la solution périodique de période T du système (3.1), avec $\hat{x}(0) = \hat{x}_0$ condition initiale.

Si la solution $x(t)$ est instable, la stabilité est prise dans un certain sens, par exemple :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - \hat{x}(t)) = 0 \quad (3.2)$$

ou

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - \hat{y}(t)) = 0 \quad (3.3)$$

pour toute solution $x(t)$ de l'équation (3.1) avec $x(0) = x_0 \in \Omega$ sont les conditions initiales, et Ω est un ensemble des conditions initiales quelconque, de plus $\hat{y}(t)$ la fonction de sortie (output) désirée.

Le problème est la recherche d'une fonction de contrôle pour les deux formes : non feedback contrôle :

$$u(t) = u(t, x_0)$$

ou dans la forme feedback

$$u(t) = u(x(t))$$

qui est de vérifier l'équation (3.2) ou l'équation (3.3).

Parmi les méthodes en boucle fermée, nous rappelons la rétroaction proportionnelle occasionnelle (OPF) introduite simultanément par Hunt [34] et Showalter [35], la méthode de Huebler [36] et la méthode introduite par Pyragas (TDFC) [14] qui applique une rétroaction retardée sur l'une des variables d'état de système.

Il est important de préciser que la littérature dans ce domaine est très large et les méthodologies décrites dans cette thèse ne représentent qu'une partie d'entre elle, dans ce chapitre on introduit les principes de quelques méthodes.

3.2 La méthode de Ott, Grebogi et Yorke (OGY)

La méthode de Ott, Grebogi et Yorke (OGY) de contrôle, s'appuie sur le fait qu'un attracteur chaotique étant la superposition d'une infinité d'orbites périodiques instables, constitue un réservoir dans lequel on peut choisir un comportement périodique particulier. On laisse alors le système évoluer librement ; jusqu'à ce qu'il s'approche de l'orbite choisie, puis par une perturbation d'un paramètre approprié, on le force à rester sur cette orbite.

3.2.1 Principe de la méthode

Soit un système dynamique non linéaire à comportement chaotique donné par [33] :

$$x(i+1) = F(x(i), p), \quad (3.4)$$

où le vecteur x représente les variables d'états du système et p est un paramètre de contrôle accessible de l'extérieur pour des petits ajustements.

Le but du contrôle est de bien choisir ces ajustements afin de réaliser la stabilisation d'une certaine orbite périodique instable (UPO) de l'attracteur chaotique. Pour cela, on suppose que le paramètre de contrôle p peut varier dans un petit intervalle autour d'une certaine valeur nominale p_0 et que le système chaotique admet des points fixes instables dans la section de Poincaré.

Chapitre 3. Contrôle du chaos

Soit x_f un point fixe donné. La linéarisation du système (3.4) autour de son point fixe est donnée par :

$$\delta x(i+1) = A\delta x(i),$$

où

$$\delta x(i+1) = x(i+1) - x_F(p) \text{ et } A = \lambda_u e_u f_u + \lambda_s e_s f_s$$

Si on applique des petits changements au paramètre p , alors la coordonnée du point fixe est décalée également à un certain point voisin $x_F(\bar{p})$.

Autour de ce point, on peut écrire les approximations suivantes :

$$\begin{aligned} x_f(\bar{p}) &= x_f(p) + (\bar{p} - p_0) \left(\frac{\partial x_f}{\partial p} \right)_{p=p_0} \\ &= x_f(p) + \delta p(i) B \end{aligned}$$

où $\delta p(i) = (\bar{p} - p_0)$ et $B = \left(\frac{\partial x_f}{\partial p} \right)_{p=p_0}$
 $\delta x(i+1)$ peut alors être réécrite sous la forme :

$$\delta x(i+1) = \delta p(i) B + A[\delta x(i) - \delta p(i) B]$$

Si on veut que la variation à imposer soit telle que le point $x(i+1)$ corresponde au point fixe instable, ce qui signifie que la trajectoire du système suive la direction stable et que :

$$f_u \delta x(i+1) = 0$$

Donc

$$\delta p(i) = \frac{\lambda_u}{\lambda_u - 1} \frac{f_u}{f_u B} \delta x(i) = K \delta x(i)$$

Cette variation paramétrique est activée seulement lorsque $x(i)$ est située dans un interval
 $|\delta x(i)| < \delta p_{max}$

3.3 La méthode de contrôle en boucle ouverte (nonfeedback)

La première catégorie inclue les méthodes dans lesquelles le contrôle du chaos est réalisé en convertissant le comportement chaotique en n'importe quel comportement périodique désiré. Dans ce type d'algorithmes, le but est de faire en sorte que le flot $x(t)$ suit une dynamique $g(t)$ choisie au préalable. Ceci implique l'addition à l'équation du mouvement :

$$\dot{x} = F(x)$$

d'un terme $u(t)$ de tel sorte que

$$|x(t) - g(t)| \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow \infty$$

Dans ce cas, les auteurs choisissent :

$$u(t) = dg/dt - F(g(t))$$

Le problème est que la valeur de la perturbation u est généralement grande .

3.4 La méthode de contrôle en boucle fermée (feedback)

Cette méthode consiste à perturber les variables d'état de système pour atteindre l'orbite cible, elle a l'avantage de garantir la stabilité robuste, la forte capacité de rejet de bruit[25][37].

Généralement elle est formulée comme suit :

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t)$$

Où $x(t)$ est le vecteur d'état de système et $u(t)$ le vecteur de contrôle.

Le problème est de déterminer le contrôle $u(t) = g(x, t)$, g est un vecteur non linéaire (inclus le cas linéaire) de telle manière que Le système contrôlé :

$$\dot{x}(t) = f(x, g(x, t), t)$$

peut se conduire par le contrôle en boucle fermé $g(x, t)$ pour atteindre l'orbite cible $x^*(t)$

$$\lim_{t \rightarrow t_f} \|x(t) - x^*(t)\| = 0$$

Généralement on détermine le contrôle $u(t)$ qui guide le vecteur d'état $x(t)$ correspondant au système non linéaire :

$$\dot{x}(t) = f(x, t) + u(t)$$

vers l'orbite cible $x^*(t)$ de la manière suivante

$$u(t) = \dot{x}^*(t) - f(x(t), t) + K(x(t) - x^*(t))$$

Où K est une matrice dont les parties réelles de ses valeurs propres sont toutes négatives.

Si on pose

$$e(t) = x(t) - x^*(t)$$

alors

$$\dot{e}(t) = Ke(t)$$

et on a $e(t) \rightarrow 0$ par suite $x(t) \rightarrow x^*(t)$ pour $t \rightarrow \infty$.

3.4.1 La méthode de Pyragas

Pyragas [14] en 1992 propose une méthode qui permet de stabiliser des orbites périodiques instables, en se basant sur la connaissance de leurs ordres mais sans connaître leurs positions. Elle se base sur l'application d'un terme de retard d'état, afin de forcer l'évolution dynamique du système à suivre une dynamique périodique désirée le long de sa période. Ainsi, le retard doit avoir la valeur exacte de la période de l'orbite périodique instable à stabiliser.

Soit le système dynamique défini par :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Q(x, y) \\ \dot{y} &= P(x, y) + F(t)\end{aligned}$$

où $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ représente les variables de système qui sont pas intéressent et $y \in \mathbb{R}$ peut être mesure, $Q : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$, et $P : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, et F est un signal de contrôle.

Pyragas propose deux types de feedback contrôle

1- Contrôle par feedback retardé

$$F(t) = \eta(y(t - \tau) - y(t))$$

2- Contrôle par feedback extérieur

$$F(t) = \delta(\bar{y}(t) - y(t))$$

Pour stabiliser les orbites périodiques instables avec $\bar{y}(t)$ est un orbite périodique instable doit stabiliser et τ est la période. Si la période de la force extérieure $T = 1/f$ ou le temps de retarde égale a τ , donc il est possible de trouve un feedback capacité η et δ qui permettent la stabilisation de OPI

Plusieurs modifications ont été apportés à la méthode de Pyragase pour contrôler tout type de systèmes chaotique, par exemple Nakajima & Ueda [46] l'appliquent aux systèmes avec symétrie. Konishi & Kokam [47] étendent la méthode et l'appliquent aux système couplés.

3.5 Le contrôle adaptatif

Développé dans la seconde moitié du dernier siècle [48] [49], le champ de contrôle adaptatif est encore intéressant, défiant, et excitant avec une variété d'applications dans les systèmes de contrôle modernes.

Le contrôle adaptatif couvre un ensemble de techniques qui fournissent une approche pour

l'ajustement automatique des contrôleurs en temps réel, afin d'atteindre ou de maintenir un niveau souhaité de performance du système de contrôle lorsque les paramètres du modèle dynamique sont inconnus ou changent avec le temps. Dans ce cas le modèle du système est représenté sous une forme paramétrique :

$$\dot{x} = F(x, \theta, u) \quad (3.5)$$

$$y = h(x) \quad (3.6)$$

Où $\theta \in R^p$ est le vecteur des paramètres inconnus. D'après (3.5), la loi de contrôle est aussi mise sous une forme paramétrique :

$$u = U(x, \zeta)$$

Où ζ dépend de θ , c'est-à-dire $\zeta = \varphi(\theta)$ pour une application $\varphi(\cdot)$.

Le processus est obtenu en mesurant les états du système $x(t)$, ou les sorties $y = h(x(t))$ sont utilisées, pour évaluer les paramètres d'adaptation qui sont des estimations, soit $\hat{\theta}(t)$ les valeurs estimées des paramètres inconnus $\theta(t)$, soit des paramètres du contrôleur $\hat{\zeta}(t)$.

Une large variété des méthodes d'adaptation existe tel que les méthodes du gradient et le gradient incliné, les moindres carrés, probabilité maximale, et ainsi de suite peuvent être utilisées pour développer des algorithmes de contrôle adaptatif et l'identification paramétrique.

Ces méthodes sont bien connues dans la littérature de la théorie de contrôle [50] [51], leur validation est basé habituellement sur la fonctions de Lyapunov.

3.6 La méthode Backstepping

Le Backstepping est une méthode systématique pour la conception de contrôle non linéaire, elle peut être appliquée pour une classe générale de systèmes. Son nom se rapporte à la nature récursive de la conception de la procédure. En premier, un petit sous système est considéré pour lequel une loi de commande virtuelle est conçue, puis la conception est étendue sur plusieurs