Chapitre VI

ÉQUATION DE LA CHALEUR

Dans ce chapitre, on étudie l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = 0, \tag{13}$$

où u est une fonction définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$. Cette équation modélise certaines phénomènes d'évolution comme la diffusion de chaleur, la répartition de substances chimiques, ...

Remarque 91 *Un changement de variable, $t^* = kt$, transforme cette équation en*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0. \tag{14}$$

Il suffit donc d'étudier le cas $k = 1$.

6.1 Modélisation

6.1.1 Équation de réaction-diffusion

On va modéliser le comportement de diffusion d'une population (cellules, insectes) ou de particules (substances chimiques). On suppose l'existence d'une source de particules (naissance, resp. décès, d'insectes).

Soit $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$, avec Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $\partial\Omega$ régulier. On note :

• $u(x,t)$ la fonction de densité des particules (la concentration),

• $q(x,t,...)$ le taux de création net de particules (naissances moins décés) et

•$F(x,t,...)$ la densité du flux de particules, c'est-à-dire $F(x,t).n$ est le flux de particules (par unité de temps) à travers un élément de surface plane, perpendiculaire à n en x et d'aire 1.

On suppose pour la suite que u et F sont régulières et on considère $O \subset \Omega$ de bord régulier.

La variation de masse dans O est due à la création/destruction de particules dans O et au flux de particules à travers $\partial\Omega$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_O u(x,t)dx = \int_O q(x,t)dx - \int_{\partial O} F(x,t).n(x)dS_x,$$

d'ou, pour tout $O \subset \Omega$.

$$\int_O \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)dx = \int_O -\operatorname{div}(F(x,t)) + q(x,t)dx,$$

dont on tire la loi d'équilibre de la population

$$\frac{\partial}{\partial t} u = -\operatorname{div} F + q \text{ dans } \Omega.$$

Suivant la loi de Fourier[1], la chaleur va des régions chaudes vers les régions froides à une vitesse proportionnelle à la variation de température $F = -k\nabla u$ où k est la constante de conductivité de chaleur. On suppose que l'on ne peut perdre de la chaleur que par $\partial\Omega$ et $q = 0$. On a donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} u = -\operatorname{div} F = -\operatorname{div}(k\nabla u) = k\Delta u.$$

On a obtenu l'équation de la chaleur.

6.2 Calcul d'une solution

On considère le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \text{ sur } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*, \\ u(x,0) = g(x), \text{ sur } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

On va déterminer, de façon formelle, une solution en utilisant la transformée de Fourier de u par rapport aux variables d'espace x :

$$v(\xi, t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^d} u(x,t) e^{-ix.\xi} dx.$$

On obtient l'équation différentielle ordinaire en v

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(\xi,t) - |\xi|^2 v(\xi,t) = 0, \\ v(\xi,0) = \hat{g}(\xi), \end{cases}$$

dont la solution est :

$$v(\xi,t) = \hat{g}(\xi)e^{-|\xi|^2 t},$$

ce qui donne :

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(\xi)e^{-|\xi|^2 t}e^{ix.\xi}d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y,t)g(y)dy,$$

où :

$$K(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^d} \exp(i(x-y).\xi - |\xi|^2 t)d\xi = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

où $x^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ est le produit scalaire de x avec lui même. La fonction K est appelée le noyau da la chaleur.

Lemme 92 (a) *K possède les propriétés suivantes :*

1. *$K \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ et pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $t > 0$: $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) K(x,t) = 0$.*
2. *$\int_{\mathbb{R}^d} K(x,t)\, dx = 1$ pour tout $t > 0$.*

Preuve. La démonstrations de la premiére propriété est simple. Pour la démonstration de la deuxiéme propriété, il faut savoir que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} K(x,t)\, dx &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{x^2}{4t}} dx \\ &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-x^2} dx \\ &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2} \dots e^{-x_n^2} dx_n \dots dx_1 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^n = 1. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Théorème 93 *Soit* $g \in L^p(\mathbb{R}^n)\,(1 \leq p \leq \infty)$ *et soit :*

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y,t)\, g(y)\, dy.$$

Alors :

(i) *Si* $g \geq 0$ *et* g *non identiquement nulle, alors* $u(t.x) > 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^n, t > 0.$

(ii) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ *et*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \;\; x \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

(iii) *Si* $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$*et si* g *est continue en* $x_0 \in \mathbb{R}^n$,*alors*

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} u(x,t) = g(x_0).$$

En particulier, si g *et continue et bornée, alors* u *est continue sur* $\mathbb{R}^n \times [0,\infty[$ *et* $u(0,x) = g(x).$

(iv) *Pour tout* $t > 0$ *on a* $\|u(.,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$

Preuve. La propriété (i) suit immédiatement de (1) du Lemme(a) et (ii) suit de (2)

du Lemme(a). Pour (iii) en utilisant Fubini. Soit $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ continue en $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, en utilisant (ii) de Lemme précédent, on obtient :

$$\begin{aligned}
& |u(x,t) - g(x_0)| \\
= & \left| \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y,t)\,(g(y) - g(x_0))\, dy \right| \\
\leq & \|g\|_{L^\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x_0,\varepsilon)} K(x-y,t)\, dy \right| + \left| \int_{B(x_0,\varepsilon)} K(x-y,t)\,(g(y) - g(x_0))\, dy \right| \\
\leq & \frac{\|g\|_{L^\infty}}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x_0,\varepsilon)} e^{-y^2/4t} dy + \sup_{y \in B(x_0,\varepsilon)} |g(y) - g(x_0)| \\
= & \frac{\|g\|_{L^\infty}}{(\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B\left(x_0,\varepsilon/\sqrt{4t}\right)} e^{-y^2} dy + \sup_{y \in B(x_0,\varepsilon)} |g(y) - g(x_0)|.
\end{aligned}$$

et donc :

$$\limsup_{(x,t)\to(x_0,0)} |u(x,t) - g(x_0)| \leq \sup_{y\in B(x_0,\varepsilon)} |g(y) - g(x_0)|,$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Comme g est une continue en x_0, on obtient :

$$\limsup_{(x,t)\to(x_0,0)} |u(x,t) - g(x_0)| = 0.$$

La propriété (iv) suit de l'inégalité de Young appliquée à $k(.,t) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. ■

6.3 Principe de maximum et unicité

On va traiter deux cas, celui d'un domaine spatial borné et celui de l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}^n$. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert borné réglier.

Théorème 94 *Soient $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ et $\lambda \geq 0$ tels que :*

$$\lambda u - \Delta u \leq 0.$$

Alors :

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Preuve. Dans le cas de $\lambda = 0$, on retrouve le principe du maximum du chapitre précédent. On suppose que $\max_{\partial\Omega} u = 0$. Alors il suffit de montrer que $u \leq 0$. Pour $\varepsilon > 0$ on définit :

$$g_\varepsilon(\eta) = \begin{cases} 0, \eta \leq 0, \\ \frac{\eta^2}{2\varepsilon}, 0 < \eta < \varepsilon, \\ \eta - \frac{\varepsilon}{2}, \eta \geq 0. \end{cases}$$

Donc, $g_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$ et $0 \leq g' \leq 1$. En plus, $\lim_{\varepsilon\to 0} g_\varepsilon(\eta) = \eta$ pour tout $\eta \geq 0$. Une intégration par partie donne :

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lambda \int_\Omega u g_\varepsilon(u) - \int_\Omega \Delta u g_\varepsilon(u) \\ &= \lambda \int_\Omega u g_\varepsilon(u) + \int_\Omega \nabla u \nabla g_\varepsilon(u) - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial n} g_\varepsilon(u) \\ &= \lambda \int_\Omega u g_\varepsilon(u) + \int_\Omega |\nabla u|^2 g'_\varepsilon(u) - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial n} g_\varepsilon(u). \end{aligned}$$

Comme $\max_{\partial\Omega} u = 0$, on a $g_\varepsilon(u) = 0$ sur $\partial\Omega$, et donc le troisième terme à droit est nulle. De plus, $\lim_{\eta\to 0} g'_\varepsilon(u) = 1_{\{u\geq 0\}}$ presque partout. Le théorème de convergence dominée implique :

$$0 \geq \lambda \int_{\{u\geq 0\}} u^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2 .1_{\{u\geq 0\}}.$$

Les deux termes à droit sont positifs ($\lambda \geq 0!$), et donc cette inégalité implique

$$\lambda \int_{\{u\geq 0\}} u^2 = 0 \text{ et } \int_\Omega |\nabla u|^2 .1_{\{u\geq 0\}} = 0.$$

Si $\lambda > 0$, alors $\int_{\{u\geq 0\}} u^2 = 0$ ce qui implique $u \leq 0$ presque partout sur Ω, et par continuité, $u \leq 0$. Si on aseulement $\lambda \geq 0$, on déduit au moins que u est constante sur l'ensemble $1\{u \geq 0\}$. Par continuité, ça implique $u = 0$ sur $1\{u \geq 0\}$, et donc $u \leq 0$ sur Ω. ■

Théorème 95 *Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert on définit le spectre de l'opérateur de laplace avec conditions au bord de Dirichlet*

$$\Lambda(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \in \mathbb{R} : \exists e \in C^2(\Omega) \cap C\bar{\Omega}, e \neq 0 \\ \textit{solution de } \lambda e - \Delta u = 0 \textit{ et } e\,|_{\partial\Omega.} = 0 \end{array} \right\}.$$

Corollaire 96 *Pour tout $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ouvert, borné, régulier on a $\Lambda \subset (0, \infty)$.*

Preuve. Soit $\lambda \geq 0$ et soit $e \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ une solution de :

$$\lambda e(x) - \Delta u(x) = 0, \; e\,|_{\partial\Omega} = 0.$$

Le principe du maximum implique $e \leq 0$, et comme $-e$ est aussi une solutionde ce problème, on a aussi $e \geq 0$. Donc, $e = 0$, c.à.d. Le problème ci-dessus n'admet pas de solutions non-triviales. Donc $\lambda \notin \Lambda(\Omega)$, ou $\Lambda(\Omega) \subset (-\infty, 0)$. ■

RÉFÉRENCES

[1] Nikolenko V. Equations de la physique mathématique. UM, Moscou, 1981.

[2] Reinhard H. Equations aux dérivées partielles. Dunod, paris, 2001.

[3] Baddari K, Abbassov A. Equations de la physique mathématique appliquées. OPU, 2009.

[4] Alexandre Popier. Équations aux dérivées partielles.Licence SPI deuxième année, Semestre 4, Année : 2018–2019.

[5] Abdelkarim Kelleche. Équations de la physique mathématique, Université Djilali Bounâama, October 10, 2020.