# Chapitre V

# L'ÉQUATION DES ONDES

Cette equation est l'exemples typiques d'équation hyperbolique. Commençons par les cas du premier ordre.

## *5.1 Équation du premier ordre*

### 5.1.1 Méthode des caractéristiques

On veut résoudre l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)+c\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)=0,\ x\in\mathbb{R},\ t>0. \tag{2}$$

Ici $c$ est une constante fixée. On suppose de plus que

$$u(0,x)=f(x),\ x\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Si on mesure les variations de $u$ le long d'une courbe $y=x(t)$, les règles de dérivation nous donnent :

$$\frac{d}{dt}u(t,x(t))=\frac{\partial u}{\partial t}(t,x(t))+\frac{\partial u}{\partial x}(t,x(t))x'(t).$$

Si on suppose que $x'(t)=c$, alors l'équation (2) impose :

$$\frac{d}{dt}u(t,x(t))=\frac{\partial u}{\partial t}(t,x(t))+\frac{\partial u}{\partial x}(t,x(t))c=0.$$

Ainsi $u$ est constante le long des courbes $y=x(t)$ telles que $x'(t)=c$, autrement dit

$$x = ct + x_0,\ x_0 = x(0).$$

Cette famille de courbes définissent les courbes caractéristiques de (2)

Pour trouver la valeur de $u$ au point $(t_1, x_1)$ fixé, on considère une caractéristique d'équation $x = ct + x_0$, passant par $(t_1, x_1)$. Nécessairement $x_0 = x_1 - cT_1$. Elle intersecte l'axe des $x$ au point $(0, x_0)$. Comme $u$ est constante le long de cette courbe, on a d'après (3) :

$$u(t_1, x_1) = u(0, x_0) = f(x_0) = f(x_1 - ct_1).$$

Ainsi la solution de (2 ) vérifiant (3) est :

$$u(t, x) = f(x - ct),\ x \in \mathbb{R},\ t \geq 0. \tag{4}$$

Supposons que $t$ représente le temps, la relation $u(t, x) = f(x - ct)$ implique que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, pour tout $t \geq 0$, $u(t, x_0 + ct) = u(0, x_0)$. $u$ est une onde qui se propage à vitesse $c$.

**Exemple 80** *On choisit :*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

*avec*

$$u(0, x) = \sin(x),\ x \in [0, \pi]\,,\ u(0, x) = 0 \text{ sinon.}$$

*Alors*

$$u(t, x) = \begin{cases} \sin\left(x - \frac{1}{2}t\right), & \text{si } t/2 \leq x \leq t/2 + \pi, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Soit $\Gamma$ une courbe non caractéristique (courbe dont aucune tangente a pour pente $c$). L'ensemble des droites paralléles à la droite $x = ct$ qui coupent $\Gamma$ forment une bande*

*$G$ du plan. En un point $P$ de $G$, la valeur de $u$ est la même qu'un point d'intersection $M$ de la droite de pente $c$ passant par $P$ avec $\Gamma$.*

**Exemple 81** *Pour $c = 1$, soit $\Gamma$ la courbe $y = 1 - x$ pour $x \in [0, 1]$. Soit $F(x_0)$ la vateur de $u(x_0, 1 - x_0)$. La bonde $G$ est formée des points $(t, x)$ comprise entre les droites $t = x + 1$ et $t = x - 1$, c'est-à-dire $G = \{(t, x),\ x - 1 \leq t \leq x + 1\}$. En un point $(t_1, x_1)$ de $G$, $u(t_1, x_1) = u(x_0, 1 - x_0)$, le point $(x_0, 1 - x_0)$ étant l'intersection de $t = 1 - x$ et $t - t_1 = x - x_1$, soit $x_0 = \frac{1+x_1-t_1}{2}$. Donc dans $G$ :*

$$u(t_1, x_1) = F\left(\frac{1 + x_1 - t_1}{2}\right).$$

*Pour résumer :*

**Théorème 82** *Pour $c \neq 0$, soit l'EDP*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{5}$$

*1. Toute solution de (5) est de la forme $u(t, x) = F(x - ct)$ où $F$ est de classe $C^1$.*

*2. Une courbe caractéristique est une droite $x - ct = k$ avec $k \in \mathbb{R}$. Si $u$ est donnée sur une courbe $\Gamma$, elle est connue dans toute la bande délimitée par les caractéristiques qui coupent $\Gamma$ en un seul point.*

*La relation $u(t, x_0 + ct) = u(0, x_0)$ pour tout $t \geq 0$, exprime que $u$ se propage le long de l'axe $Ox$ à vitesse $c$. Si $c > 0$, $u$ se propage vers la droite ; si $c < 0$, $u$ se propage vers la gauche.*

*3. $u(t, x) = f(x - ct)$ est la solution de (5) dont la valeur au point $x$ à l'instant $0$ est $f(x)$ ; c'est la solution du problème de valeur initiale $f$.*

### 5.1.2 EDP quasi-linéaires du premier ordre

Dautre cas se traitent de façon similiaire à l'équation (2).

**Définition 83** *On appelle EDP quasi-linéaire du premier ordre une équation du type :*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + c(t,x,u)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = q(t,x,u). \tag{6}$$

*Bien que non linéaire en $u$, elle est linéaire par rapport aux dérivées premières de $u$. La procédure reste la même.*

**Exemple 84**

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = x,\ x > 0,\ t > 0,$$

*avec*

$$u(0,x) = \sin(x),\ x > 0,\ u(t,0) = t,\ t > 0.$$

*Les courbes caractéristiques sont $x = t + k$ avec $k$ constante. Or si on a un piont $(t_1, x_1)$ avec $t_1 > x_1$, La caractéristique passant par ce point, cette courbe ne coupe pas l'axe des abscisses pour $x > 0$. Il faut donc distinguer trois cas.*

*1. Supposons que $x_1 > t_1$. Le long de la caractéristique d'équation $x = t + k$, passant par $(t_1, x_1)$, on a*

$$\frac{d}{dt}u(t,x(t)) = x(t) = t + k,$$

*soit : $u(t,x) = \frac{1}{2}t^{\ 2} + kt + C$, avec $C$ constante. Ainsi*

$$C = u(t_1,x_1) - \frac{1}{2}t_1^2 - kt_1 = u(0,x_0) - 0 - 0 = \sin(x_0).$$

*Or $k = x_1 - t_1$ et $x_0 = k = x_1 - t_1$. Ainsi*

$$u(t_1,x_1) = \sin(x_1 - t_1) + \frac{1}{2}t_1^2 + (x_1 - t_1)t_1.$$

*2. Maintenant $x_1 < t_1$. La droite caractéristique passant par $(t_1, x_1)$ a pour équation $x = t - (t_1 - x_1)$. Elle coupe l'axe du temps $t$ en $t_0 = t_1 - x_1$.On a toujours*

$$\frac{d}{dt}u(t, x(t)) = x(t) = t + (t_1 - x_1) \Longleftrightarrow u(t, x(t)) = \frac{1}{2}t_1^2 + (t_1 - x_1)t_1 + C,$$

*avec $C$ est constante. De là*

$$C = u(t_1, x_1) - \frac{1}{2}t_1^2 - (t_1 - x_1)t_1 = u(t_0, 0) - \frac{1}{2}t_0^2 - (t_1 - x_1)t_0 = t_0 + \frac{1}{2}t_0^2.$$

*Ainsi*

$$u(t_1, x_1) = \frac{1}{2}t_1^2 + (t_1 - x_1)t_1 + t_0 + \frac{1}{2}t_0^2 = \frac{1}{2}x_1^2 - x_1 + t_1.$$

*3. On voit que dans les deux cas précédents, quand $(t_1, x_1)$ se rapproche de $x = t$, on obtient la même limite : $u(t_1, x_1) = x_1^2/2$. Donc la solution est continue sur cette droite.*

*Finalement*

$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x + t, & si\ x \leq t; \\ xt - \frac{1}{2}t^2 + \sin(x - t), & si\ x > t. \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + u^3(t, x)\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

ave

$$u(0, x) = x^{1/3},\ x \in \mathbb{R}.$$

Les courbe caractéristiques satisfont alors :

$$x'(t) = u^3(t, x(t)),\ x(0) = x_0.$$

Le long d'une courbe caractéristique, on a :

$$\frac{d}{dt}u(t, x(t)) = 0,$$

ce qui implique que :

$$u(t, x) = C = u(0, x_0) = x_0^{1/3}.$$

Donc l'équation différentielle satisfaite par $x$ est : $x'(t) = x_0$, soit encore $x = x_0t+x_0 = x_0(1+t)$. La solution est donc :

$$u(t,x) = \left(\frac{x}{1+t}\right)^{1/3}.$$

Dans le cas de système d'EDP comme :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + c_1\dfrac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + c_2\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Si on connaît $f_1$ la valeur de $u_1$ sur l'axe $t = 0$ et $f_2$ celle de $u_2$, alors les solutions du système sont $u_1(t,x) = f_1(x - c_1t)$ et $u_2(t,x) = f_2(x - c_2t)$. Il s'agit de deux ondes se propageant aux vitesses $c_1$ et $c_2$. Si $f_1$ et $f_2$ ne sont données que sur un segment $[A, B]$ de $t = 0$, le couple $(u_1, u_2)$ n'est défini que dans l'intersection des bandes déterminées par les caractéristiques $x - c_1t = k_1$ et $x - c_2t = k_2$. Cette intersection est un losange, donc un domaine borné. Si on considère seulement $t \geq 0$, les solutions $u_1$ et $u_2$ sont définies toutes les deux dans un triangle.

Le système (7) se rencontre en acoustique. Dans certaines conditions, la vitesse $u$ et la pression $p$ d' un fluide de densité $\rho$ et de coefficient de compressibilité $c$ sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Pour résoudre ce système on pose $u_1 = u + \dfrac{p}{\rho c}$ et $u_2 = u - \dfrac{p}{\rho c}$. On vérifie alors que $(u_1, u_2)$ est solution de (7) avec $c_1 = c$ et $c_2 = -c$. Donc on obtient :

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(f(x-ct) + g(x+ct)), \quad p(t,x) = \frac{\rho c}{2}(f(x-ct) - g(x+ct)).$$

Ainsi $u + \dfrac{p}{\rho c}$ se déplace avec l'onde $f(x-ct)$ vers la droite et $u - \dfrac{p}{\rho c}$ se déplace avec l'onde $g(x+ct)$ vers la gauche. Ces quantités s'appellent les **invariants de Riemann** de (8).

On notera qu'en dérivant les deux équations du système (8) par rapport à $t$ et $x$, on obtient que $u$ et $p$ sont solutions de l'équation :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0. \tag{9}$$

Nous reviendrons sur cette équation par la suite. Ainsi on peut remarquer que les deux solutions du système (8) avec des EDP d'ordre 1 sont solutions d'une EDP d'ordre 2.

Ce résultat peut aussi s'inverser : pour résoudre une équation d'ordre $p$, on se ramène à $p$ équations du premier ordre.

Voyons d'abord comment cela se fait sur notre exemple. Soit $\phi$ une fonction solution de (9). Posons $\psi = \frac{\partial \phi}{\partial t} - c\frac{\partial \phi}{\partial x}$. Alors on a :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0.$$

On écrit donc l'équation (9) ainsi :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi = 0.$$

Pour le résoudre on cherche d'abord $\psi$. comme $\frac{\partial \psi}{\partial t} + c\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$, alors $\psi(t,x) = g(x - ct)$ et on a : $g(x-ct) = \frac{\partial \phi}{\partial t} - c\frac{\partial \phi}{\partial x}$. Pour trouver une solution de cette nouvelle EDP linéaire, on additionne une solution particulière à la solution générale de $\frac{\partial \phi}{\partial t} - c\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$.

Soit $G$ une primitive de $g$ et $\eta(t,x) = \frac{-1}{2c}G(x-ct)$. Alors on a :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - c\frac{\partial \eta}{\partial x} = g(x - tc);$$

c'est donc une solution particulière. Et finalement on obtient :

$$u(t,x) = f(x+ct) - \frac{1}{2c}G(x-ct).$$

**Théorème 85** *Soit l'EDP suivante :*

$$\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x}+\beta_1\frac{\partial}{\partial y}+\gamma_1\right)^{m_1}\left(\alpha_2\frac{\partial}{\partial x}+\beta_2\frac{\partial}{\partial y}+\gamma_2\right)^{m_2}\ldots\left(\alpha_p\frac{\partial}{\partial x}+\beta_p\frac{\partial}{\partial y}+\gamma_p\right)^{m_p}u(x,y)=g(x,y).$$

*Toute solution est de la forme $u = v + G$ où $G$ est une solution particulièfre et $v$ est de la forme suivante :*

1. $v = v_1 + v_2 + ... + v_p$;
2. *si* $m_k = 1$, $v_k(x,y) = \exp\left(-x\frac{\gamma_k}{\alpha_k}\right) f_k(\beta_k x - \alpha_k y)$;
3. *si* $m_k > 1$, *alors :*

$$v_k(x,y) = \exp\left(-x\frac{\gamma_k}{\alpha_k}\right)\sum_{j=1}^{m_k} x^{j-1}\phi_j(\beta_k x - \alpha_k y).$$

*En particulier toute solution de l'équation des ondes (9) est de la forme $u(t,x) = F(x-ct)+G(x+tc)$ dans le domaine où elle est définie.*

# 5.2 Équation des ondes en dimension 1

Nous rappelons ici que l'équation des ondes est EDP (9) :

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0.$$

Toute solution est de la forme $u(t,x) = F(x+ct)+G(x-ct)$ avec $F$ et $G$ de classe $C^2$. En fait cette condition de régularité sur $F$ et $G$ peut être suprimée, auquel cas on parle de solution faible. Mais nous n'en parlons pas ici.

Dans ce qui suit, nous allons résoudre (9) sur le domaine suivant : $\{(t,x),\ t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}\}$, étant entendu que l'équation est vérifiée pour $t > 0$. L'origine des temps est choisie à l'instant où l'on commence à observer le phénomène régi par (9).

## 5.2.1 Propagation des ondes

Toute solution $u$ de (9) est de la forme $F(x+ct)+G(x-ct)$. $F$ est constante le long des caractéristique $x+ct = k_1$, tandis que $G$ est constante le long des caractéristiques $x - ct = k_2$. Soit $ABCD$ un parallélogramme dont les côtés sont portés par des caractéristiques. Alors $F(A) = F(C)$ si $AC$ est parallèle à $x + ct = 0$. De même $F(D) = F(B)$, $G(A) = G(B)$ et $G(C) = G(D)$. On obtient donc en additionnant la formule du parallélogramme :

$$u(A) + u(D) = u(B) + u(C).$$

Soit maintenant $[AB]$ un segment de l'axe $t = 0$ et supposons $c > 0$ dans (9).

Avec les notations précédentes, on a

$$F(P_1) = F(P), \quad G(P_2) = G(P), \quad F(Q_1) = F(Q), \quad G(Q_2) = G(Q).$$

Dans la bande délimitée par les droites $E1$ et $E2$, $G$ est déterminé par sa valeur sur $[AB]$ et dans la bande délimitée par $D1$ et $D2$, $F$ est déterminée par sa valeur sur $[AB]$.

Ainsi la valeur $u(Q)$ en tout point du triangle $ABC$ est complétement déterminé. Le triangle $ABC$ s'appelle **domaine de détermination** de $u$ par le segment $ABC$. Réciproquement, le segment $[AB]$ s'appelle **domaine de dépendance** de $u$ au point $C$.

La valeur de $u$ sur le segment $[AB]$ influe sur un domaine plus grand que le triangle $ABC$. Elle influe sur le domaine compris entre les droites $D1$ et $E2$ qui s'appelle **domaine d'influence** du segment $[AB]$. En effet en un point $N$ de ce domaine,

$$u(N) = u(P_2) + u(P_1) - u(P).$$

### 5.2.2 Formule de d'Alembert

Comme on regarde l'équation (9) pour $x \in \mathbb{R}$, il n'y a pas de condition frontière, mais uniquement des conditions initiales.

**Théorème 86** *La solution de (9) telle que $u(0, x) = f(x)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x)$ est :*

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy.$$

*Cette formule s'appelle la formule d'Alembert.*

## 5.3 Équation en dimension 1, avec second membre

On considère maintenant l'équation (9) pour tout $(t, x) \in [0, +\infty[ \times \mathbb{R}$ avec un second membre, soit :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = h(t, x). \tag{10}$$

**Théorème 87** *Soit $h$ une fonction continue de $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$. La solution de l'équation (10), qui vérifie $u(0, x) = f(x)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est donnée par :*

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t+\tau)} h(\tau, y)dyd\tau.$$

*On peut remarquer que c'est la somme d'une solution particulière correspondant à $f = g = 0$ et de la solution générale de l'équation où $h = 0$.*

**Le problème de Goursat** est le suivant : résoudre (10) avec les conditions $u(t, x) = f(x)$ pour $x = ct$ et $u(t, x) = g(x)$ pour $x = -ct$. Il s'agit d'un probmème où les conditions aux bords sont des conditions sur les caractéristiques. Il ne relève donc pas des méthodes précédentes. Néanmoins en mettant l'équation sous sa forme réduite, on peut résoudre ce problème.

En effet si on pose $X = x + ct$ et $Y = x - ct$, l'EDP (10) devient :

$$-4c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} = h(\frac{X - Y}{2}, \frac{X + Y}{2}).$$

De plus $X = 0$ si et seulement si $x + ct = 0$ et $Y = 0$ si et seulement si $Y = 0$. Donc $u(X, 0) = f(X/2)$ et $u(0, Y) = g(Y/2)$. Ainsi en intégrant on obtient :

$$u(t, x) = f\left(\frac{x + ct}{2}\right) + g\left(\frac{x - ct}{2}\right) - \frac{1}{4c^2} \int_0^{x+ct} \left(\int_0^{x-ct} h\left(\frac{u - v}{2c}, \frac{u + v}{2}\right) dv\right) du.$$

Dans le cas où on souhaite résoudre (10) sur un intervalle borné, on utilisera la méthode de séparation des variables.

## 5.4 Équations dans $\mathbb{R}^3$ et dans $\mathbb{R}^2$

La résolution de l'équation dans $\mathbb{R}^3$ repose sur la formule de Green. L'équation s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0. \tag{11}$$

On fera également le changement de variables en coordonnées sphériques : $\alpha = \sin\theta\cos\phi$, $\beta = \sin\theta\sin\phi$ et $\gamma = \cos\theta$. On obtient alors

**Théorème 88** *Pour tout fonction $g$ de class $C^2$ dans $\mathbb{R}^3$, il existe une unique solution $u$ de (11) telle que :*

$$u(0,x,y,z) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y,z) = g(x,y,z).$$

*En notant $P_0$ le point de coordonnées $(x_0, y_0, z_0)$ et $S(P_0, ct)$ la sphère de centre $P_0$ et de rayon $ct$, cette solution vérifie*

$$\begin{aligned} u(t, x_0, y_0, z_0) &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{S(P_0,ct)} g \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} g(x_0 + ct\sin\theta\cos\phi, y_0 + ct\sin\theta\sin\phi, z_0 + ct\cos\theta)\sin\theta d\theta d\phi. \end{aligned}$$

*Autrement dit, la valeur de $u$ en $P_0$ à l'instant $t$ est égale à $t$ fois la moyenne de $g$ sur la sphère de centre $P_0$ et de rayon $ct$.*

**Théorème 89** ***(Formule de Kirchoff)*** *Pour toute fonction $g$ de classe $C^2$ et toute fonction $f$ de classe $C^3$ dans $\mathbb{R}^3$, il existe une unique solution $u$ de (11) telle que :*

$$u(0,x,y,z) = f(x,y,z), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x,y,z) = g(x,y,z).$$

*Cette solution est donnée par la formule de Kirchoff :*

$$u(t, x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{S(P_0,ct)} g + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_{S(P_0,ct)} f\right). \tag{12}$$

*Autrement dit, la valeur de $u$ en $P_0$ à l'instant $t$ est égale à $t$ fois la moyenne de $g$ sur la sphère de centre $P_0$ et de rayon $ct$.*

Supposons que $f$ et $g$, les valeurs initiales, soient nulles hors d'un domaine de frontière $\partial D$. Alors d'après la formule de Kirchoff, $u(t, x_0, y_0, z_0)$ est non nul seulement si $S(P_0, ct) \cap D \neq \emptyset$.

Soit un point $P_0$ de coordonnées $(x_0, y_0, z_0)$ extérieur à $D$ et $d_1$ et $d_2$ le minimum et le maximum de la distance entre $Q$ et $P_0$ lorsque $Q$ parcourt $D$. Alors

1. si $ct < d_1$, $u(t, x_0, y_0, z_0) = 0$;
2. si $d_1 < ct < d_2$, $u(t, x_0, y_0, z_0) \neq 0$;
3. si $ct > d_2$, $u(t, x_0, y_0, z_0) = 0$;

Ceci se résume par **le principe de Huyghens** tout se passe comme si chaque point de $\partial D$ émettait une onde qui se propage à la vitesse $c$; tant qu'aucune de ses ondes n'a atteint $P_0$, $u(P_0)$ est nul, puis lorsque toutes les ondes ont dépassé $P_0$, $u(P_0)$ est de nouveau nul. Il y a ainsi deux fronts d'onde : un front avant et un front arrière.

**Théorème 90** *1. Soit $f = 0$ et $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Alors la formule de Kirchoff donne*

$$u(t, x, y, z) = t(x^2 + y^2 + z^2) + c^2 t^3.$$

*2. Soit $g = 0$ et $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Alors*

$$u(t, x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 3c^2 t^2.$$

### 5.4.1 L'équation des ondes en domaine borné

On considère à présent l'équation des ondes $1D$ posée sur le domaine de l'espace normalisé $[0, 1]$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ t > 0, x \in ]0,1[ \qquad (9)$$

avec les conditions initiales $u(x,0) = g(x)$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = h(x), x \in ]0,1[$$

et par exemple les conditions de bord de Dirichlet homogène :

$$u(0,t) = u(1,t) = 0,\ t > 0$$

### 5.4.2 Séparation des variables et séries de Fourier

La solution est

$$u(x,t) = T(t)\, X(x), t > 0, x \in [0,1]$$

On obtient alors

$$T"(t)\, X(x) = c^2 T(t)\, X"(x).$$

On a alors

$$X"(x) = \lambda X(x), , x \in [0,1]$$

et

$$T"(t) = \lambda c^2 T(t), t > 0$$

ou $\lambda$ est un réel.

Les solutions de la première équation :

$$X(x) = \alpha \exp\left(\sqrt{\lambda} x\right) + \beta \exp\left(-\sqrt{\lambda} x\right)$$

Les condition de Dirichlet reportées sur $u$ imposent ensuite les conditions $X(0) = X(1) = 0$, ce qui nécessite d'avoir $\alpha = -\beta$ et $\exp\left(\sqrt{\lambda} x\right) = \exp\left(-\sqrt{\lambda} x\right)$.

Dès lors il apparaît qu on ne trouve aucune solution si $\lambda > 0$ et que les seules valeurs convenables pour $\lambda \leq 0$ sont les valeurs pour les qu'elles $\sqrt{\lambda} \in i\pi\mathbb{Z}$, soit encore $\lambda = -(n\pi)^2$pour $n \in \mathbb{N}$. Alors la solution est multiple de $X(x) = \sin n\pi x$, au quel correspond un facteur temporel oscillant de la forme

$$T(t) = a_n \cos(n\pi ct) + b_n \sin(n\pi ct).$$

De manière plus générale, si les conditions initiales $g$ et $h$ admettent des développement en série de Fourier de la forme

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \sin(n\pi x), h(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \sin(n\pi x)$$

alors la solution du problème de Dirichlet est donnée par :

$$u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n \cos(n\pi ct) + b_n \sin(n\pi ct)) \sin(n\pi x).$$