Centre Universitaire de Mila **Année universitaire** 2022/2023

Institut des Sciences et de la Technologie **Domaine**: MI-Mathématiques (1^{er}année)

Analyse 2 Série d'exercices N°01 **Semestre 2**

Exercice 1:

Montrer que:

$$Arc\sin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \forall x \in]0,1[\,;$$
$$Arc\tan x > \frac{x}{1+x^2}, \qquad \forall x > 0;$$
$$Arc\sin x + Arc\cos x = \frac{\pi}{2}, \qquad \forall x \in]-1,1[\,;$$
$$Arc\tan x + Arc\tan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \qquad \forall x > 0.$$

Exercice 2:

1. Les réels x et y étant liés par: $x = \ln\left(\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

   - Calculer chx, shx et thx en fonction de y.

2. Calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\left(ch^3x - sh^3x\right) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(x-\ln\left(chx\right)\right).$$

Exercice 3:

En utilisant le développement de Maclaurin de la fonction $\ln(x+1)$, montrer que:

$$\forall x>0, \quad x-\frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x.$$

Exercice 4:

En utilisant le développement de Taylor-Young, calcule la limite suivante:

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\ln(x+1)-x+\dfrac{x^2}{4}}{(\sin x)^2}.$$

Exercice 5:

1) - Écrire la formule de Maclaurin avec le reste de Lagrange pour la fonction $f(x)=e^x$ à l'ordre n.

- Montrer que: $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+....+\frac{1}{n!} < e < 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+....+\frac{1}{n!}+\frac{e}{(n+1)!}$.

- En déduire la limite de la suite $u_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.

Exercice 6:

En utilisant la formule de Maclaurin pour la fonction $\ln(x+1)$. Calculer:

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-......+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right).$$

Exercice 7:

Trouver la limite de la suite (u_n) définie par:

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right), \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Exercice 8:

Calculer les développements limités jusqu'à l'ordre n au voisinage de x_0 des fonctions suivantes:

$$\begin{array}{lcl}
1)\ f(x) & = & x(chx)^{\frac{1}{x}}, \quad x_0 = 0, \quad n = 3, \\
2)\ f(x) & = & \ln(1+\sin x), \quad x_0 = 0, \quad n = 3, \\
3)\ f(x) & = & \dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}, \quad x_0 = 0, \quad n = 4, \\
4)\ f(x) & = & \cos(\sin x)\,; \quad x_0 = 0, \quad n = 4. \\
5)\ f(x) & = & \dfrac{x}{1-x^2}, \quad x_0 = 0, \quad n = 4, \\
6)\ f(x) & = & \ln \dfrac{\sin x}{x}, \quad x_0 = 0, \quad n = 4, \\
7)\ f(x) & = & \dfrac{1+2x+x^3}{x^3+x^5}, \quad x_0 = 0, \quad n = 2, \\
8)\ f(x) & = & \exp(\sqrt{x}), \quad x_0 = 1, \quad n = 3, \\
9)\ f(x) & = & \dfrac{x^3+2}{x-1}, \quad x_0 = +\infty, \quad n = 3.
\end{array}$$

Exercice 9:

Soient f et g deux fonctions qui admettent des développements limités au voisinage de zéro donnés par:

$$f(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4); \qquad g(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

- Calculer le développement limité jusqu'à l'ordre 4 au voisinage de zéro de la fonction gof.
- En déduire la limite: $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{gof(x) - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$.

Exercice 10:

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x}\right), \qquad \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^{3x} \sin 3x}{sh(-2x)}, \qquad \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$