Université Abdelhafid Boussouf - Mila 2022 − 2023
Institut des Sciences et de la Technologie
Département des Mathématiques et informatique **Algèbre** 2

Série no 1 : Généralités sur les espaces vectoriels

Exercice 1. 1. *On considère dans $\mathbb{R}_+^*$ la loi interne $\oplus$ et la loi externe $\cdot$ de domaine d'opérateurs $\mathbb{R}$, définies par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, x \oplus y = xy$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \lambda \cdot x = x^\lambda.$$

Monter que $(\mathbb{R}_+^*, \oplus, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. $\mathbb{R}^2$ *muni de la loi interne définie par :*

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

et d'une loi externe définie par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda^2 x_1, \lambda^2 x_2).$$

est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 2. *Parmi les ensembles suivants, lesquels sont, ou ne sont pas, des sous-espaces vectoriels ?*

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + 3z = 0\}$.
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + 3z = 2\}$.
3. $E_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x = y = 2z = 4t\}$.
4. $E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 0\}$.
5. $E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = x^2\}$.
6. $E_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + 3y - 5z = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y + z = 0\}$.
7. $E_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + 3y - 5z = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y + z = 0\}$.
8. $E_8 = \{P \in \mathbb{R}[X]; P(0) = P(2)\}$.
9. $E_9 = \{P \in \mathbb{R}[X]; \deg(P) \geq 3\}$.
10. $E_{10} = \{P \in \mathbb{R}[X]; P' \text{ divise } P\}$.
11. $E_{11} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f \text{ est bornée } \}$.
12. $E_{12} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f \text{ est minorée } \}$.
13. $E_{13} = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f' + 2f = 0\}$.
14. $E_{14} = \{f \in \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{R}); \int_a^b f(t)dt = 0\}$.

Exercice 3. 1. *Le vecteur $t = (1, 0, -1, 5)$ appartient-il au sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs : $u = (1, 4, 5, 2), v = (1, 2, 3, 2) et w = (1, 1, 0, -1)$?*

2. *Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1, -1, 2)$ et $(2, 1, 1)$*
- Montrer qu'il existe trois réels a, b, c tels que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | ax + by + cz = 0\}$

Exercice 4. *On note E l'ensemble des suites réelles convergentes, F l'ensemble des suites réelles de limite nulle et G l'ensemble des suites réelles constantes.*
1. *Montrer que E, F, G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*
2. *Montrer que $E = F \oplus G$.*

Exercice 5. *Les familles suivantes sont-elles libres ?*

1. $\{(-1,5,0),(0,-1,1),(1,2,3)\}$ *dans* $\mathbb{R}^3$.
2. $\{(2,-1,3),(1,0,-3),(3,-2,9)\}$ *dans* $\mathbb{R}^3$.
3. $\{(0,1,0),(11,-2,-2),(4,-1,-1),(2,1,2)\}$ *dans* $\mathbb{R}^3$.
4. $\{(3,1,0,-2),(0,-3,1,1),(7,2,-4,1)\}$ *dans* $\mathbb{R}^4$.
5. $\{1, 2+X, 1-X^2\}$ *dans* $\mathbb{R}_2[X]$.
6. $\{-X, 1+X+X^2, X-X^3\}$ *dans* $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 6. *Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que*

$$F+G = F+H, \quad F\cap G = F\cap H, \quad \textit{et} \quad G \subset H.$$

Prouver que $G = H$.

Exercice 7. *Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les ensembles*

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+z=0\}$$

et

$$E = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(1+X) = P(1-X)\}.$$

1. *Montrer que F et E sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Préciser une base et la dimension de F et de E.*

Exercice 8. *On considère la partie F de $\mathbb{R}^4$ définie par*

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 ; x+y=0 \textit{ et } x+z=0\}.$$

1. *Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et donner une base de F.*
2. *Compléter la base trouvée en une base de $\mathbb{R}^4$.*
3. *On pose $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (1,2,3,4)$ et $u_3 = (-1,0,-1,0)$. La famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est-elle libre ?*
4. *On pose G l'espace vectoriel engendré par les vecteurs u_1, u_2 et u_3. Quelle est la dimension de G ?*
5. *Donner une base de $F \cap G$. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.*
6. *Est-ce qu'un vecteur de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G ?*